

Dispense per Modelli Matematici
A.A. 1999\00

F. Patrone e M. Margiocco

10 settembre 2001

1 Relazioni

Siano A, B due insiemi. Una relazione ρ tra A e B è assegnata ogniqualvolta abbiamo una regola che permette di dire, dato $a \in A$ e $b \in B$, se è vero oppure no che a è in relazione “ ρ ” con b . Se a è in relazione “ ρ ” con b , scriviamo $a\rho b$.

Si noti che una relazione ρ tra A e B individua un sottoinsieme E di $A \times B$ così caratterizzato:

$$E_\rho = \{(a, b) \in A \times B : a\rho b\}.$$

Si noti anche che “vale il viceversa”. Cioè, dato un sottoinsieme E di $A \times B$, questo individua una relazione (che indicheremo con ρ_E) tra A e B , definita così: dati $a \in A$, $b \in B$, diremo che $a\rho_E b$ se $(a, b) \in E$. Data la relazione ρ , E_ρ viene spesso indicato come il “grafico” della relazione ρ .

Esercizio 1.1 Sia A l’insieme dei membri del Senato della Repubblica (italiana) e sia B l’insieme dei membri della Camera dei Deputati. Possiamo definire la seguente relazione tra A e B : diciamo che $a\rho b$ se a e b appartengono allo stesso partito politico. Sia poi data una legge L , approvata dal Parlamento. Definiamo ρ_L dicendo che $a\rho_L b$ se a e b hanno votato allo stesso modo l’approvazione della legge L . Le relazioni ρ e ρ_L coincidono? E se invece consideriamo ρ_F ($a\rho_F b$ se a e b hanno votato entrambi a favore della legge L), è vero che $\rho = \rho_F$? E si ha $\rho_L = \rho_F$? ■

Esercizio 1.2 Siano $A = B = \mathbb{R}$. Diciamo che $a\rho b$ se $a = b^2$. Rappresentare il grafico di ρ nel piano cartesiano. ■

Osservazione 1.1 Ricordiamo che, se ρ è una relazione tra A e B , allora il suo grafico è un sottoinsieme di $A \times B$. Nel caso in cui $A, B \subseteq \mathbb{R}$ (come nei precedenti esercizi), è $A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Quindi, $E_\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cioè $E_\rho \subseteq \mathbb{R}^2$. Pertanto, è possibile *rappresentare* E_ρ nel *piano cartesiano*. Cioè, introdotto un sistema di riferimento cartesiano nel piano (euclideo), ad E_ρ possiamo associare un sottoinsieme Γ_ρ del piano. Che, poi, potremo a sua volta rappresentare su un foglio (o sulla lavagna, su uno schermo, etc.). Pertanto, è *scorretto* dire che la figura “calcata” sotto è una relazione tra $A = [3, 8]$ e $B = [2, 5]$.

La figura F “calcata” rappresenta “concretamente” sul foglio una figura nel piano euclideo Φ , alla quale possiamo associare (mediante il sistema di

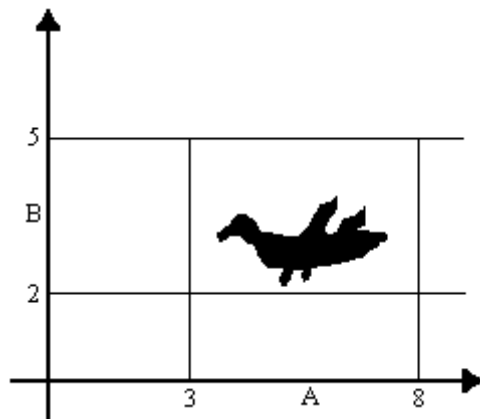


Figura 1.1

coordinate indicato) il grafico E di una relazione ρ tra gli intervalli A e B (i quali a loro volta sono rappresentati in figura mediante la stessa catena di passaggi che ci permette di passare da ρ ad F). (vedi figura 1.1) ■

Osservazione 1.2 Naturalmente, poi si dice normalmente che F è una relazione tra gli intervalli A e B . Ovverossia, si danno per scontati, per impliciti, tutti i passaggi sopra indicati. Niente di male, purché uno ne sia *consapevole*. ■

Problema 1.1 Fare almeno un paio di esempi analoghi ai “passaggi sottintesi” (uno matematico ed uno no). ■

E' ben noto che c'è una classe *molto* importante di relazioni tra insiemi. Si tratta delle *funzioni*.

Una relazione ρ tra A e B si dirà essere una funzione (da A a B) se *per ogni* $a \in A$ *esiste* ed è *unico* $b \in B$ t.c. apb .

Come dovrebbe essere evidente, l'idea di grafico di una funzione è un caso particolare di grafico di una relazione.

Problema 1.2 Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2$. Questa f può essere rappresentata da un disegno sul monitor di un calcolatore. Ma f cosa è “dentro” un calcolatore, ovverossia, come viene rappresentata in memoria?. ■

Un'altra classe molto importante di relazioni si ha nel caso in cui B sia uguale ad A . In questo caso, si usa parlare di relazioni *su* A .

Per una relazione ρ su un insieme è molto importante stabilire se gode oppure no di talune proprietà. In particolare ci soffermeremo sulle proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva e totale.

Definizione 1.1 Sia ρ una relazione su un insieme A . La relazione ρ si dice:

riflessiva se	$\forall a \in A, a\rho a$
simmetrica se	$\forall a, b \in A, (a\rho b \Rightarrow b\rho a)$
antisimmetrica se	$\forall a, b \in A, [(a\rho b \text{ e } b\rho a) \Rightarrow a = b]$
transitiva se	$\forall a, b, c \in A, [(a\rho b \text{ e } b\rho c) \Rightarrow a\rho c]$
totale se	$\forall a, b \in A, (a\rho b \text{ vel } b\rho a)$

Definizione 1.2 Una relazione ρ su un insieme A si dice relazione di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definizione 1.3 Una relazione ρ su un insieme A si dice relazione d'ordine se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esercizio 1.3 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo $a \sim_f b$ se $f(a) = f(b)$. Dimostrare che \sim_f è una relazione di equivalenza. ■

Esercizio 1.4 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo $a \preceq_f b$ se $f(a) \leq f(b)$. La relazione \preceq_f è una relazione d'ordine? ■

Problema 1.3 Per definire le relazioni \sim_f e \preceq_f è essenziale che il codominio di f sia \mathbb{R} ? ■

Esercizio 1.5 Sia ρ una relazione tra un insieme A e B . Definiamo una relazione tra B ed A , che diremo relazione *inversa* di ρ e che indicheremo con ρ^{-1} , nel modo seguente:

$$b\rho^{-1}a : \Longleftrightarrow a\rho b$$

Siano $A = B = \mathbb{R}$ e sia $x\rho y$ se e solo se $y = x^2$. Chi è ρ^{-1} ? Disegnarne il grafico. ■

Esercizio 1.6 Sia E un insieme, e sia $A = \mathcal{P}(E)$ ¹. La relazione di inclusione \subseteq su A è una relazione d'ordine? E' totale? ■

¹ $\mathcal{P}(E)$ rappresenta l'insieme delle parti di E . Cioè l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di E (compreso E stesso e l'insieme vuoto)

2 Grafi

Il concetto di grafo è importante: i grafi vengono usati spesso (eventualmente con elementi accessori) per rappresentare, modellizzare delle situazioni. In particolare i grafi *finiti*, dei quali soli ci occuperemo.

Nonostante si tratti di una struttura matematica finita, i grafi presentano un certo numero di insidie se non affrontati con la consueta precisione che è tipica della matematica.

Cominciamo col dare le definizioni principali.

Definizione 2.1 *Dicesi grafo orientato semplice una coppia ordinata $G = (V, A)$, dove V è un insieme ed $A \subseteq V \times V$.*

Gli elementi di V sono detti vertici (o anche nodi) e quelli di A archi del grafo.

Nota 2.1 L'aggettivo "semplice" usato nella definizione serve per distinguere quanto abbiamo definito dai grafi "multipli". Dato che però ci occuperemo solo di grafi semplici, d'ora in poi ometteremo questo aggettivo. Osserviamo anche che d'ora in poi ci occuperemo solo di grafi finiti (ovverossia t.c. V è un insieme finito). Anche questo fatto verrà sottinteso. Quindi, quando parleremo di grafo (orientato) ci riferiremo ad un grafo (orientato) *semplice e finito*. ■

Esempio 2.1 Sia $V = \{RM, GE, MI, TO\}$. E sia $A = \{(RM, GE), (RM, MI), (GE, MI), (GE, TO)\}$. $G = (V, A)$ è un grafo orientato. ■

Esempio 2.2 Sia $V = \{RM, GE, MI, TO\}$. E sia $A = \emptyset$. $G = (V, A)$ è un grafo orientato. ■

Esempio 2.3 Sia $V = \emptyset$. E sia $A = \emptyset$. $G = (V, A)$ è un grafo orientato. ■

Esempio 2.4 Sia $V = \{1, 2, \dots, 10\}$.
 $A = \{(v', v'') \in V \times V : v' \text{ è un divisore di } v''\}$. $G = (V, A)$ è un grafo orientato. ■

Esercizio 2.1 Elencare esplicitamente tutti gli elementi di A del precedente esempio. ■

Esempio 2.5 Si consideri la figura disegnata sotto:

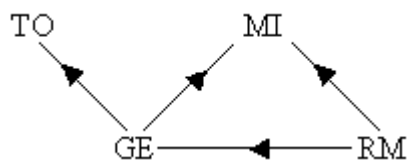


Figura 2.1

Questa figura ovviamente *non è un grafo*². Altrettanto ovviamente, però, *individua* un grafo orientato. Per la precisione, il grafo dell'Esempio 2.1. Ovvero, i vertici sono Sia RM, GE, MI, TO . E gli archi sono appunto $(RM, GE), (RM, MI), (GE, MI), (GE, TO)$. Se diamo naturalmente per scontato che le frecce indichino coppie ordinate di vertici il cui primo elemento è quello che sta dalla parte della “coda” della freccia, mentre il secondo è quello che sta dalla parte della punta. ■

²Stando, ovviamente, alla Definizione 2.1. Si noti che, però, in base a certe definizioni date su alcuni libri, lo sarebbe

Esercizio 2.2 Le figure seguenti individuano anch'esse lo stesso grafo dell'Esempio 2.1?

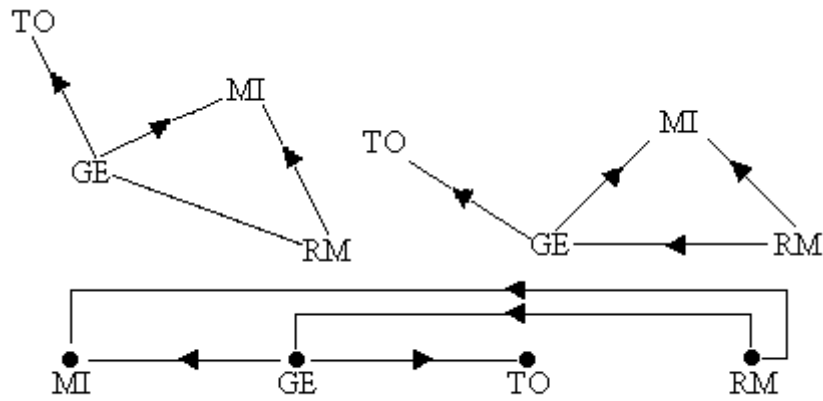


Figura 2.2

Problema 2.1 Le figure seguenti individuano lo stesso grafo?

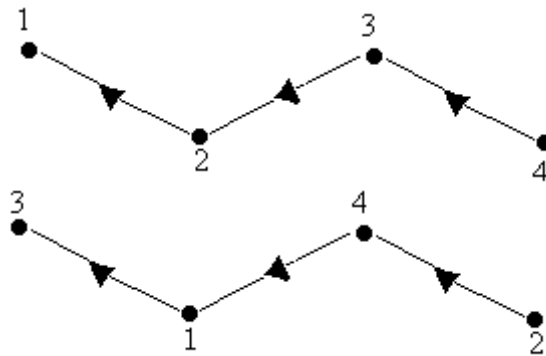


Figura 2.3

Definizione 2.2 Siano $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ due grafi orientati. Se esiste una corrispondenza biunivoca $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ t.c.:

$$\forall v', v'' \in V_1 [(v', v'') \in A_1 \iff (\phi(v'), \phi(v'')) \in A_2],$$

allora i due grafi si dicono isomorfi.

Osservazione 2.1 Nell'insieme \mathcal{G} di tutti i grafi orientati finiti, la relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza (verifica facile). Una classe di equivalenza viene detta *grafo* orientato (semplice, finito) *astratto*. ■

Esercizio 2.3 Dimostrare che i grafi del Problema 2.1 sono tra loro isomorfi. ■

Esercizio 2.4 I grafi del Problema 2.1 sono loro isomorfi al grafo dell'Esempio 2.1?

E al grafo disegnato sotto ?

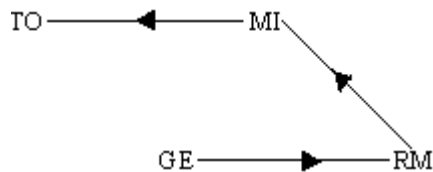


Figura 2.4

E a quest'altro?

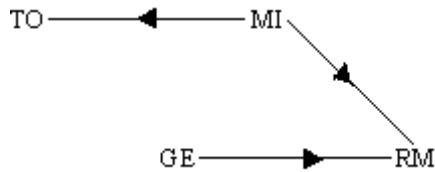


Figura 2.5

Esercizio 2.5 Provare che i grafi orientati disegnati nella figura successiva non sono isomorfi.

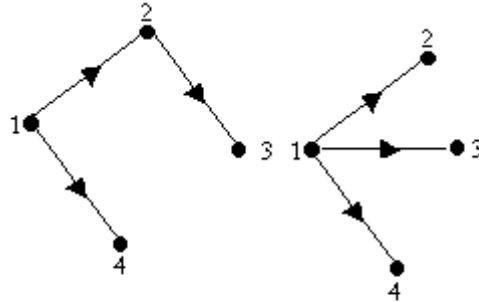


Figura 2.6

■

Esercizio 2.6 Quanti sono i grafi astratti con 3 vertici? E quelli con 4? ■

Definizione 2.3 *Dicesi grafo non orientato semplice una coppia ordinata $H = (V, E)$, dove V è un insieme ed $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$. Dove con $\mathcal{P}_2(V)$ indichiamo l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V che contengono esattamente due elementi.*

Gli elementi di V sono detti vertici e quelli di E lati (o spigoli) del grafo.

Esempio 2.6 Sia $V = \{RM, GE, MI, TO\}$. E sia $E = \{\{RM, GE\}, \{RM, MI\}, \{GE, MI\}, \{GE, TO\}\}$. $H = (V, E)$ è un grafo non orientato semplice.

■

Osservazione 2.2 Anche nel caso dei grafi non orientati ci occuperemo solo di quelli semplici e finiti (cioè con V finito): ometteremo pertanto queste specificazioni. ■

Osservazione 2.3 La terminologia in teoria dei grafi è molto varia. Occorre fare attenzione, se si legge un libro sui grafi, a quali siano le definizioni adottate. Si noti che, ad esempio, per i grafi non orientati si può trovare detto che è (V, E) , dove E è un insieme di coppie non ordinate di V . In

questo caso, si può avere che la coppia non ordinata $[\bar{v}, \bar{v}] \in E$, dove ovviamente $\bar{v} \in V$. Questo *non* è ammesso invece nella Definizione data qui. Va da se che non si può dire quale sia la definizione “migliore”. Ed anche che è facile passare da un linguaggio ad un altro. Purché si sia consapevoli di quale è il linguaggio usato! ■

Definizione 2.4 Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato. Una n -pla di vertici (v_1, \dots, v_n) si dice cammino orientato (o circuito) se $(v_i, v_{i+1}) \in A$ per ogni $i = 1, \dots, n - 1$.

Definizione 2.5 Sia $H = (V, E)$ un grafo non orientato. Una n -pla di vettori (v_1, \dots, v_n) si dice catena (o cammino) se $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ per ogni $i = 1, \dots, n - 1$. Se $v_1 = v_n$, diremo che la catena è un ciclo. Se, inoltre, nessun lato è ripetuto (cioè se $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_k, v_{k+1}\}$ per $i, k = 1, \dots, n - 1$, $i \neq k$), diremo che è un ciclo semplice.

Definizione 2.6 Sia $H = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo che H è connesso se per ogni $v_i, v_j \in V$ esiste un cammino di estremi v_i e v_j (cioè esiste un cammino (v_1, \dots, v_n) t.c. $v_i = v_1$ e $v_n = v_j$).

Definizione 2.7 Sia $H = (V, E)$ un grafo non orientato. Diremo che H è un albero se:

- è connesso
- è privo di cicli semplici.

Esempio 2.7 ■

La figura sopra individua un albero.

Definizione 2.8 Dicesi albero con radice una coppia ordinata (T, \bar{v}) , dove $T = (V, E)$ è un albero e dove $\bar{v} \in V$.

Esempio 2.8 I disegni seguenti individuano tre *distinti* alberi con radice, ma lo stesso albero.

■

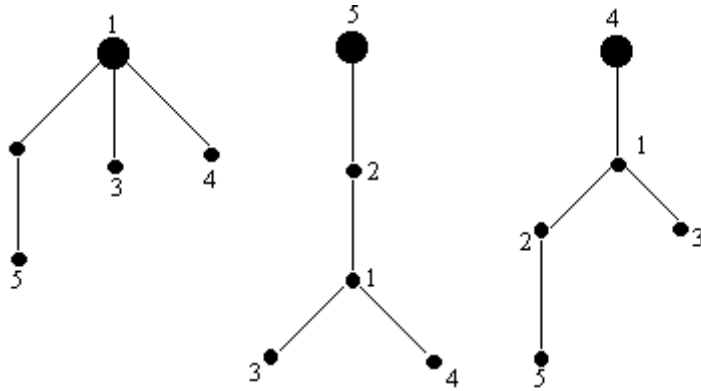
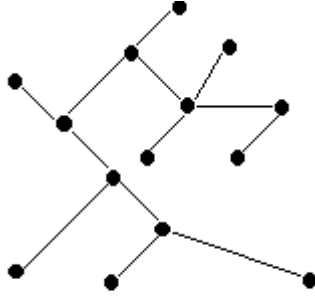


Figura 2.8

Problema 2.2 Definire una opportuna nozione di isomorfismo tra alberi con radice. I tre alberi con radice della figura precedente individuano lo stesso albero con radice astratto? ■

E' abbastanza facile immaginare come, dato un albero con radice $R = (T, \bar{v})$, si possa indurre un "ordinamento" sui lati di T in modo da convertirlo, da grafo non orientato, a grafo orientato in modo che le "frece" vadano dalla radice verso le "foglie". Tale grafo orientato è individuato univocamente.

3 Applicazioni dei grafi

Come vedremo, molte applicazioni “dei grafi” sono, in realtà, applicazioni di qualcosa di un po’ più complesso, e cioè dei grafi etichettati. Rinvio ai prossimi paragrafi la trattazione di questo problema. Vedremo ora invece alcuni esempi di applicazione dei grafi “nudi”.

Cominciamo con un esempio di “applicazione” ad un noto rompicapo. Non certo perchè io ritenga di particolare interesse “esercitarsi” a risolvere rompicapi (anche se ha alcuni aspetti da “palestra intellettuale”, non fornisce competenze significative dal punto di vista della modellizzazione dei problemi). Ma perché mi offrirà lo spunto per mettere in evidenza alcuni passi significativi dei processi di modellizzazione (avere le idee chiare, usare notazioni furbe, utilizzare rappresentazioni grafiche, stare attenti alle distrazioni...). Offro due strade diverse (anche se non del tutto indipendenti) per la soluzione del rompicapo. E, per le ragioni didattiche sopra dette, le descriverò con un dettaglio pedante. Va da sé, tuttavia, che per trarre frutto da questo esempio è indispensabile che uno provi dapprima a *risolvere* il rompicapo. Ma attenzione: risolvere attraverso la costruzione di un modello utile e mediante il suo studio, *non* mediante “illuminazione improvvisa” giunta alla fine di pensieri in libertà!

Voglio anche sottolineare un aspetto che rende invece “libresco” questo esempio. E, cioè: essendo inserito in un paragrafo intitolato “applicazioni dei grafi” si pensa che sarà il caso di risolverlo con i grafi... E così sarà. Ma quando uno ha un problema *vero* davanti, non sempre ha anche il “paragrafo” dove questo si possa collocare!

Problema 3.1 (svolto) Si consideri la seguente situazione. Abbiamo un barcaiolo, un lupo, una pecora ed un cavolo. Sono tutti sulla sponda sinistra di un fiume. Il barcaiolo deve traghettare tutti dall’altra parte. Però sulla barca può trasportare al più solo *uno* di questi “oggetti” per ogni viaggio. Si tratterebbe di fare solo un po’ di viaggi, se non fosse che... Se lupo e pecora restano sulla stessa sponda in assenza del barcaiolo, indovinate un po’ cosa fa il lupo... Idem per pecora e cavolo.

Domanda: ce la farà il barcaiolo a portare tutti e tre sull’altra sponda? E se sì, come? ■

Ovviamente invito chi legge a trattenersi dalla tentazione di girare la pagina prima di aver provato a risolvere il problema.

Soluzione 1. Un'idea è partire dalla “configurazione iniziale” ($BLPC$ tutti sulla sponda sx) e vedere quali siano le configurazioni che sono “immediatamente raggiungibili” da questa, con un solo viaggio del barcaiolo. Evidentemente sono 4 (il barcaiolo va da solo, oppure si porta con sé uno dei 3 “oggetti”).

Prima di procedere, notiamo che ci fa comodo avere un modo “spiccio” per indicare una configurazione. Ad esempio, potremmo indicare così: (LC, BP) la configurazione nella quale L e C sono a sx mentre B e P sono a dx . La configurazione iniziale allora sarebbe $(BLPC, *)$, usando il simbolo “ $*$ ” per indicare che “non c'è nulla” (sulla sponda dx , in questo caso). Ma possiamo anche osservare che ciò che è a sx individua completamente quanto è a dx (non sono previsti “annegamenti”!). E quindi semplificare le notazioni. Usare cioè LC al posto di (LC, BP) e $BLPC$ al posto di $(BLPC, *)$ e così via. Detto questo, vediamo di rappresentare le prime quattro possibilità.

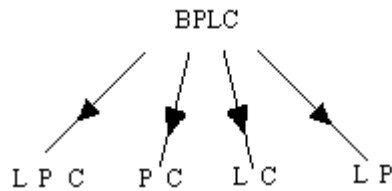


Figura 3.1

Si noti che è importante (non sto dicendo che è difficile) aver ben chiaro il significato dell'arc



Figura 3.2

, per evitare rischi

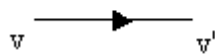


Figura 3.3

mi dice che posso passare dalla configurazione v a quella v' con un solo

attraversamento del fiume da parte del barcaiolo. Senza distinguere se lui passi dalla sponda sx a quella dx o viceversa.

E' evidente che, pur se tutti e 4 i "traghettamenti" sono possibili, se si passa ad esempio alla configurazione *PC* "il gioco è finito"!

Decidiamo allora di cancellare la configurazione *PC*. Quindi, i vertici del nostro grafo non saranno *tutte* le configurazioni "a priori" possibili (16), ma solo quelle che non prevedono abbuffate. Osserviamo anche, a proposito di questa semplificazione, che non ci poniamo qui ed ora l'obbiettivo di trovare tutte e sole le configurazioni ammissibili. A priori potrebbero esserci delle configurazioni ammissibili ma non "raggiungibili" dalla configurazione iniziale. Ma la nostra strategia di soluzione non è basata sull'elencazione di tutte le configurazioni, bensì sull'analisi dei possibili "percorsi" che ci porteranno (sperabilmente) dalla configurazione iniziale a quella finale. In altre parole, costruiremo il grafo "passo a passo" (se si vuole, "dinamicamente") a partire dalla configurazione iniziale; si potrebbero invece indicare a priori tutti i vertici del grafo (ovverossia, tutte e sole le configurazioni possibili senza abbuffate) e poi vedere quali possiamo congiungere con archi e quali no.

Il nostro grafo, per quanto detto (eliminazione abbuffate), si riduce drasticamente:



Figura 3.4

Lo sviluppo immediatamente successivo è il seguente:

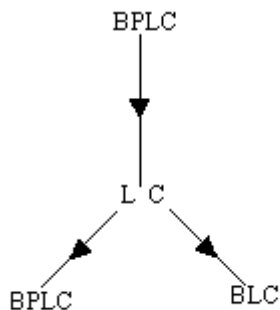


Figura 3.5

Si tratta, ovviamente, del barcaiolo che torna indietro (da solo, o portando P con sé).

Notiamo l'arco



Figura 3.6

Questo ci riporta alla condizione di partenza.

Se siamo certi che, ai fini del nostro problema, la distribuzione degli “oggetti” del barcaiolo sulle due sponde caratterizzi completamente le varie situazioni³, possiamo anche eliminare l'arco



Figura 3.7

Per ribadire come occorra stare attenti nel fare queste considerazioni, farò un esempio basato sul gioco degli scacchi. Chi non conosce bene le regole del gioco (e forse anche qualcuno che le conosce) può immaginare che una situazione del gioco sia descritta completamente dalla configurazione dei pezzi

³Ribadisco: *ai fini del nostro problema*. Ovviamente il barcaiolo se va avanti e indietro sarà più stanco...

sulla scacchiera, più il sapere “a chi tocca”.
Ebbene, così non è. E per molti motivi!

- Può essere che ad esempio non si possa arroccare, perché un giocatore ha mosso re o torre (anche se li ha ricondotti alla loro casella iniziale, sennò ce ne accorgeremmo dalla disposizione dei pezzi).
- La “presa al varco” è possibile solo alla mossa immediatamente successiva all’avanzamento di un pedone di due passi.
- Ai fini della richiesta della patta, che una configurazione si sia già presentata in precedenza sulla scacchiera è rilevante
- Sempre ai fini della patta, è importante sapere da quante mosse non ci sono state catture od avanzamenti di pedone

Spero sia chiaro quel che volevo dire. Ritorniamo quindi al nostro problema ed al nostro grafo, per metter in pratica il secondo tipo di semplificazione che abbiamo analizzato.

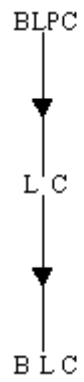


Figura 3.8

Da questo otteniamo \rightsquigarrow

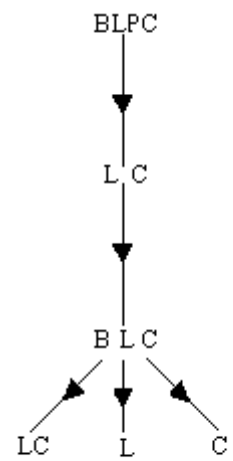
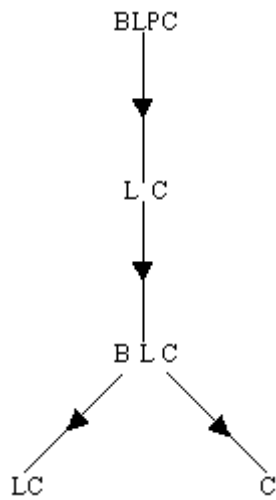
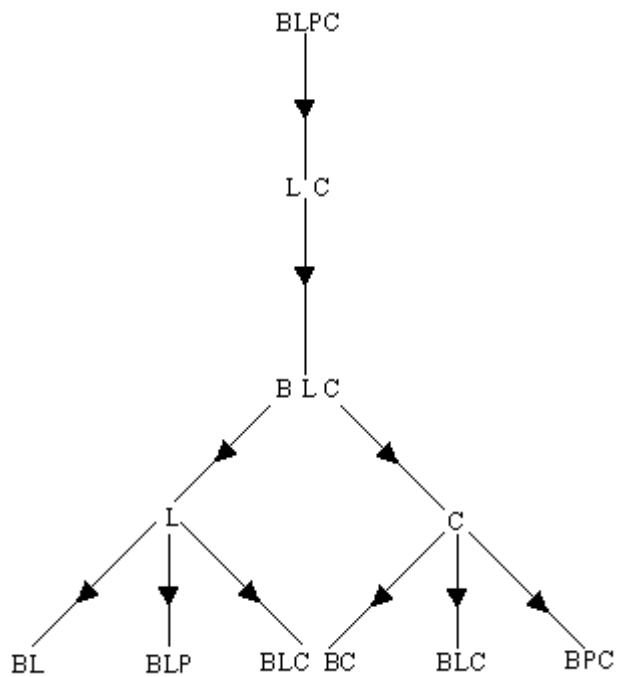


Figura 3.9

Ma il nodo LC è già stato “passato”, quindi è inutile “ritornarci”. Allora ci resta



Facciamo “tornare indietro” il barcaiolo:

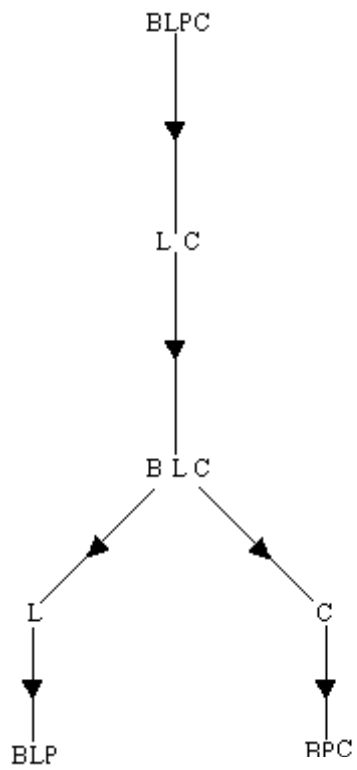


Ovviamente elimineremo *BLC* “già visto”

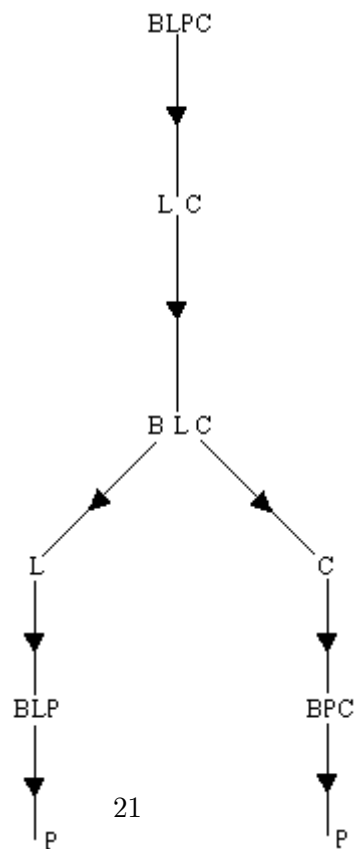
Quindi, nel ramo “di sinistra” dell’alberello fin qui costruito restano solo *BL* e *BLC*.

Ma occorre fare attenzione! Se c’è *BL* sulla riva *sx*, vuol dire che c’è *PC* sulla riva *dx*! E questo non va bene...

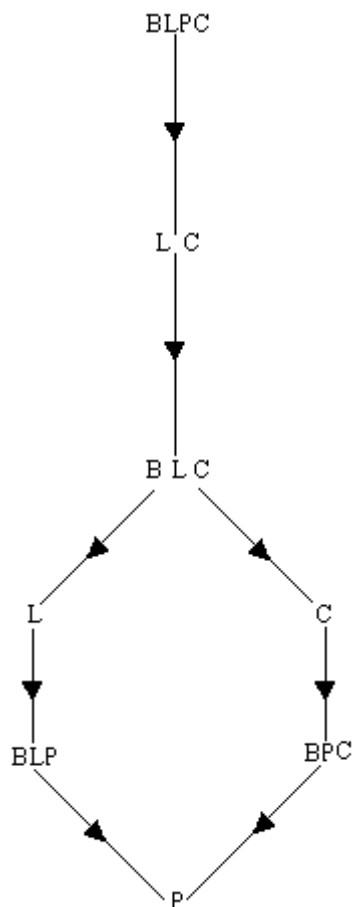
Insegnamento da trarre: abbiamo cercato una rappresentazione semplificata della situazione, che ne contiene *implicitamente* tutta la descrizione. Ma se ci dimentichiamo di tenere presente *esplicitamente* alla nostra mente quello che la notazione contiene implicitamente, siamo fritti. Allora, il nostro grafo si semplifica.



E quindi \rightsquigarrow



Ho già tolto i vertici già toccati, o non accettabili.
 L'ultimo grafo che abbiamo ottenuto ha una "stranezza". Nel senso che "lo stesso vertice" P compare due volte.
 Ovviamente, se siamo convinti che sia lo stesso vertice dobbiamo rifare il disegno, con due frecce che vanno a P (una da BLP e l'altra da BPC).
 Ma siamo convinti? Sarebbe meglio di sì, visto che ci eravamo già detti d'accordo che la configurazione di chi è a sx e di chi è a dx contenga tutta l'informazione che ci interessa. E, allora, poche esitazioni!⁴
 Abbiamo:

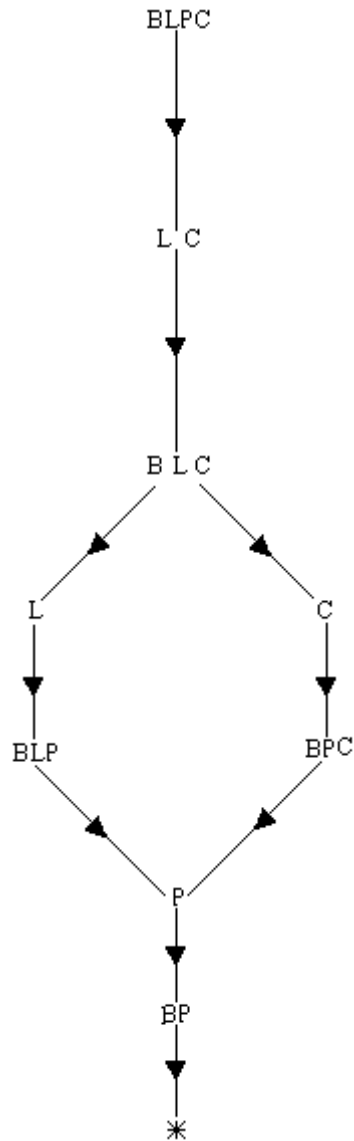


A questo punto non c'è più nulla di interessante da dire⁵.

⁴Ma ricordiamoci che "errare humanum est, perseverare...".

⁵Ma davvero posso fare questa affermazione?

Completiamo il grafo \rightsquigarrow :



Quindi il nostro problema ha soluzioni. E sappiamo anche indicarne almeno una. (In realtà ne abbiamo trovato due, che sono in un certo senso quelle “minimali” nel senso che richiedono il minimo numero di traghettamenti⁶ ■

⁶Perché? Ma perché io ho già risolto il problema, prima di scrivere queste note... No! E’ per come abbiamo costruito il tutto: abbiamo considerato tutti i possibili traghettamenti, e quindi quel che abbiamo è certamente il percorso più breve possibile.

Soluzione 2. L'altro approccio che voglio proporre è, per così dire, più “statico” (mentre l'approccio precedente è “dinamico” o “generativo” che dir si voglia).

Elenchiamo *tutte* le configurazioni possibili a priori, senza tener conto del fatto che lupo mangia pecora, et. Siete capaci di farlo? Provateci! E provate anche ad elencarle in modo “furbo”, prima di girare pagina.

Le configurazioni possibili sono 16, ed un modo sensato per elencarle è il seguente:

*****disegno a sx di quel che viene dopo...

Si noti che quello che ho scritto nella colonna di destra *non* rappresenta ciò che sta sulla riva dx del fiume! Ognuna delle configurazioni si riferisce alla sponda sx.

Collegiamo i vertici⁷ che indichino se si può passare da una configurazione all'altra con uno ed un solo traghettoamento:

Come si vede, di cammini che colleghino *BLPC* con *** ce ne sono tantissimi. Ma, naturalmente, ci ricordiamo bene che esistono dei vertici “vietati”: *PC*, *LP*, *LPC*. Ed anche quelli *BL*, *BC* e *B* (perché vuol dire che sulla sponda dx c'è un banchetto).

Eliminiamo questi vertici. Ci rimane un grafo “più piccolo”. Perché ovviamente non solo eliminiamo i vertici “vietati”, ma anche i lati che hanno un estremo in uno di questi vertici possibili.

*****disegno

Dal grafo è evidente che il problema ha soluzione. Possiamo ricostruire chiaramente un percorso da *BLPC* a ***.

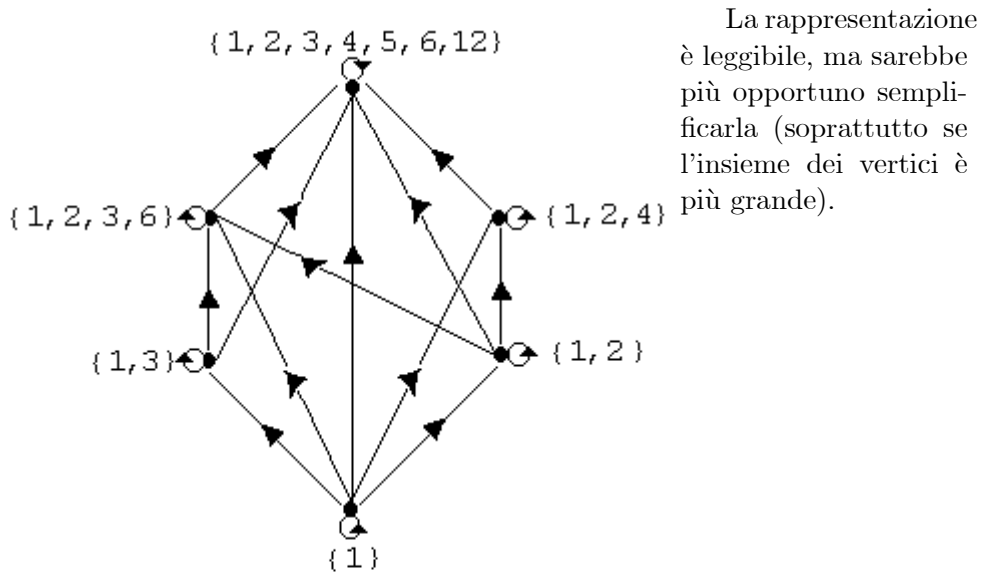
Si noti che avremmo anche potuto risparmiarci il grafo della pagina *****precedente, se avessimo applicato subito le restrizioni alle configurazioni.

■

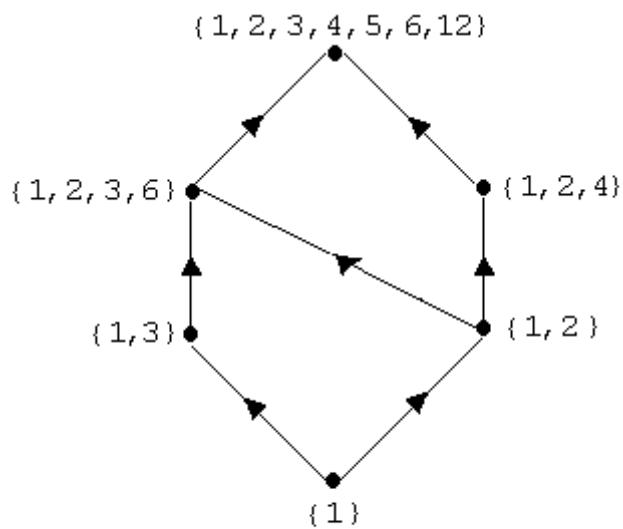
Un'altra applicazione dei grafi è data dai cosiddetti “diagrammi di Hasse”.

Se abbiamo una relazione d'ordine su un insieme finito, la possiamo ovviamente rappresentare con un grafo orientato. Ad esempio, consideriamo $V = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}\}$ e consideriamo su V la relazione di inclusione insiemistica (che è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva, vale a dire una relazione d'ordine). Essendo una relazione su V , essa individua un sottoinsieme A di $V \times V$ e pertanto il grafo (V, A) che possiamo rappresentare così:

⁷Possiamo trascurare l'orientamento: ogni traghettoamento è chiaramente “reversibile”

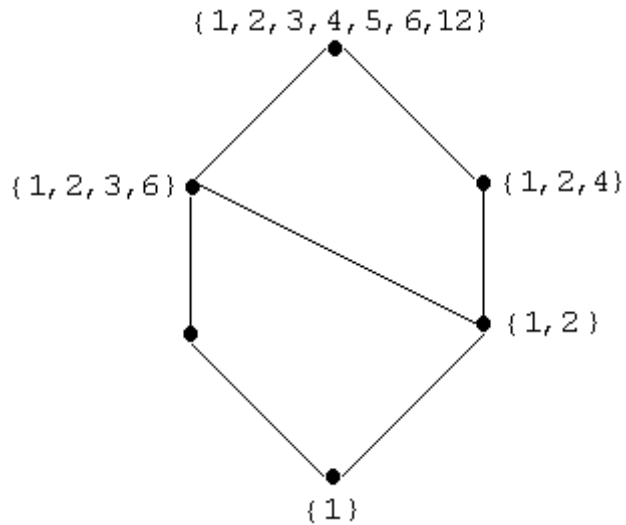


Per semplificare, una prima idea ovvia è quella di eliminare i “cappi”. Ma poi bisognerebbe riuscire a sfruttare in modo furbo la proprietà transitiva per eliminare le frecce. Osserviamo che la proprietà transitiva ci garantisce che, se c'è un cammino da v_1 a v_n , allora c'è anche un arco da v_1 a v_n . Possiamo allora eliminare tutte le figure che colleghino due vertici i quali sono “già collegati” da un cammino. Allora il grafo precedente si riduce al seguente:



Si noti che il grafo rappresentato da questa figura è *diverso* dal grafo rappresentato dalla figura precedente! Però da questo si può *ricostruire* quello precedente, imponendo la riflessività e transitività.

Se poi adottiamo la convenzione che “le frecce vanno verso l’alto”, possiamo anche eliminarle ed ottenere quello che è il cosiddetto “grafo di Hasse” della nostra relazione d’ordine.



4 Grafi etichettati: definizioni ed applicazioni

Molte volte, quando si utilizza lo strumento dei grafi, si ha a che fare con una struttura più ricca di quella di puro e semplice grafo. Ovverossia, si ha ciò che usualmente viene detto “grafo etichettato”.

Vediamo subito un esempio:

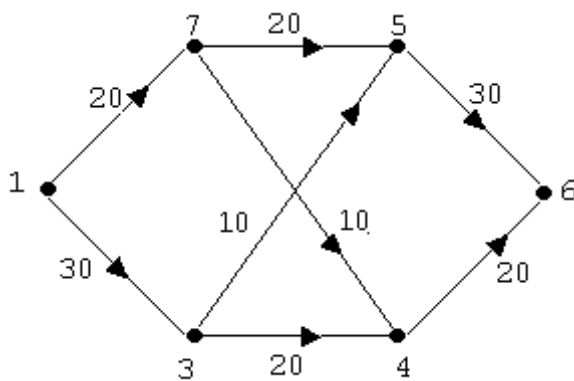


Figura 4.1

Cosa sono quei numeri “appiccicati” agli archi? Sono, per l'appunto, *etichette*. Il grafo potrebbe essere la schematizzazione di una rete idrica e le etichette potrebbero indicare la portata (in m^3/sec , ad esempio) dei vari rami.

Come possiamo formalizzare⁸ questo? Molto semplicemente. Ci serve un *insieme* U (l'insieme delle etichette) ed una *funzione* f che associ ad ogni vertice (od arco, o lato) la sua etichetta. Ci possono essere varianti, ma l'idea è essenzialmente questa.

Nell'esempio sopra, possiamo prendere $U = \mathbb{R}$ ed avremo una $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (A indica l'insieme degli archi del nostro grafo). Ma non è questo l'unico caso. Potremmo essere di fronte a un grafo come quello della pagina seguente:

Possiamo pensarlo come grafo non orientato, con i lati etichettati. Abbiamo cioè (V, E, f) .

Dove $f : E \rightarrow U$. E dove $U = \{ \text{tratteggiato, intero, calcato} \}$. Si pensi alle

⁸Per meglio dire, come possiamo ridurre questi disegni evocativi agli strumenti consueti della matematica (insiemi, funzioni, etc.) di modo che poi ci possiamo argomentare sopra in modo affidabile?

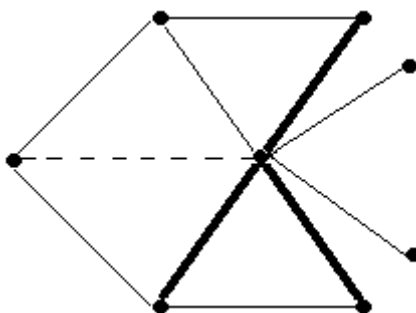


Figura 4.2

convenzioni in uso nel disegno tecnico od industriale.

Oppure, una cartina stradale: le strade indicano lati di un grafo. Si distinguono tra autostrade, strade statali, etc.: in fondo non facciamo altro che “attaccare” etichette ai lati. A dire il vero, una cartina stradale convoglia più informazione di quanta non ne contenga il grafo (per quanto etichettato) che essa evoca. Gli archi ci danno una indicazione della tortuosità della strada, magari anche del tipo di paesaggio che ci possiamo aspettare, etc. Qualcosa che è più vicina ad un grafo etichettato è una cartina della metropolitana o delle linee di autobus, di quell che fanno attenzione solo agli incroci etc., senza preoccuparsi di una rappresentazione cartografica in scala.

Ovviamente le etichette possono essere “attaccate” ai vertici, oltre che ai lati. O a vertici e lati. O possiamo attaccare più di una etichetta ad un lato.

Esercizio 4.1 Prendere una “cartina” di bus o metrò o treni e indicare quale possa esser il grafo etichettato che essa individua. ■

Esercizio 4.2 Trovare esempi di grafi etichettati nei modi appena descritti. ■

In quel che segue sui grafi vedremo esempi molto variegati di etichettature.

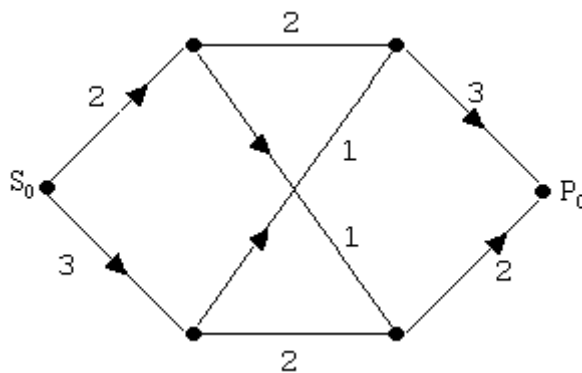
5 Reti

Un caso particolarmente interessante di grafo etichettato è dato da un “network” (o “rete”).

Definizione 5.1 *Un network è $R = (V, A, f, S_0, P_0)$, dove:*

V è un insieme finito	[vertici]
$A \subseteq V \times V$	[archi]
$f : \rightarrow \mathbb{R}_>$	[capacità]
$S_0, P_0 \in V$	[sorgente e pozzo]

Osservazione 5.1 Abbiamo che, se $R = (V, A, f, S_0, P_0)$ è un network, allora $G = (V, A)$ è un grafo (*finito*) orientato. Si noti che la condizione $S_0, P_0 \in V$ garantisce che $V \neq \emptyset$. Ma non è escluso il caso (degenere, siamo d'accordo!) in cui $S_0 = P_0$, ed esso sia anche l'unico vertice di V . ■



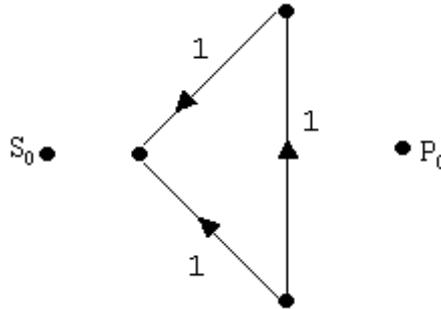
Esempio 5.1 Figura 5.1

Il disegno sopra individua un network R con 6 vertici ed 8 lati. Accanto ai lati sono indicate le loro capacità. ■

In questo esempio, S_0 e P_0 sono “staccati” tra loro. ■

Definizione 5.2 *Dato un network è $R = (V, A, f, S_0, P_0)$, dicesi flusso (ammissibile) su R una funzione $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}_\geq$ t.c.:*

- 1) $\phi(a) \leq f(a) \quad \forall a \in A$
- 2) $\forall v \in V \setminus \{S_0, P_0\}, \quad \sum_{a \in v^-} \phi(a) = \sum_{a \in v^+} \phi(a)$ (legge di Kirchoff)



Esempio 5.2 Figura 5.2

Dove v^- indica l'insieme degli archi “uscenti” da v (cioè aventi v come primo estremo) e v^+ indica l'insieme degli archi entranti in v . La legge di Kirchoff esprime ovviamente un principio di conservazione.

La legge di Kirchoff non è un “must”. Nulla ci vieta di studiare reti e flussi per i quali essa è violata. In qual caso, naturalmente, dovremmo considerare anche altre sorgenti o pozzi. Noi ci occuperemo solo del caso in cui la legge di Kirchoff è soddisfatta. Cioè del caso in cui ci sia una sola sorgente ed un solo pozzo.

Di un flusso ci interessa il suo “valore”. Cioè, intuitivamente, quanto “passa” da S_0 a P_0 . Introduciamo la seguente:

Definizione 5.3 Sia ϕ un flusso su R . Definiamo valore del flusso ϕ il numero reale $\sum_{a \in S_0^-} \phi(a)$.

Problema 5.1 E' vero che, come ci aspettiamo ragionevolmente (grazie alla legge di Kirchoff), si ha $\sum_{a \in S_0^-} \phi(a) = \sum_{a \in P_0^+} \phi(a)$? Cioè che ciò che esce dalla sorgente è uguale a quello che entra nel pozzo? Provare a verificarlo! Su esempi. E anche a provare il risultato in generale. *Prima di voltare pagina!* ■

Soluzione. Contrariamente a quanto si potrebbe ritenere, *non* è vero che $\sum_{a \in S_0^-} \phi(a) = \sum_{a \in P_0^+} \phi(a)$. Si consideri il seguente esempio:

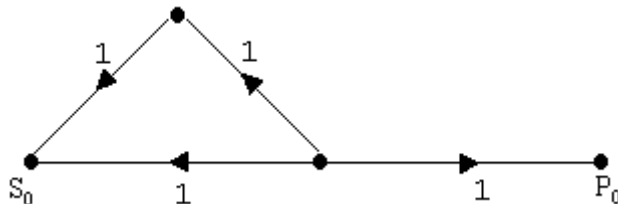


Figura 5.3

Date le capacità, è evidente che un flusso ammissibile su questo network è dato dai numeri (cerchiati) indicati a fianco degli archi nella figura sotto.

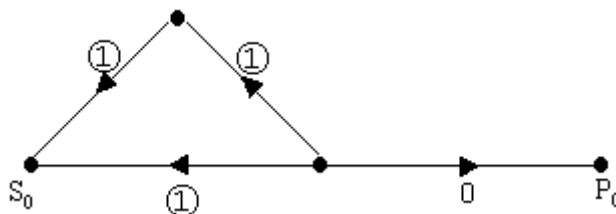


Figura 5.4

Come mai questa stranezza? Lo si capisce dalla figura: c'è un arco *entrante* in S_0 !

E allora? Sarà meglio *ridare* la definizione di network, *imponendo anche questa condizione*⁹. E questa volta sarà quella che useremo davvero.

Definizione 5.4 Un network è $R = (V, A, f, S_0, P_0)$, dove:

⁹Non perché la precedente definizione fosse “sbagliata”. In matematica, le uniche definizioni “sbagliate” sono quelle incoerenti, e questa non lo è. Si tratta però di una definizione in cui gli aspetti formali non corrispondono all’idea che “abbiamo in testa”.

V è un insieme finito [vertici]
 $A \subseteq V \times V$ [archi]
 $f : \rightarrow \mathbb{R}_>$ [capacità]
 $S_0, P_0 \in V$ [sorgente e pozzo]
non vi sono archi entranti in S_0 né archi uscenti da P_0 .

Esercizio 5.1 I primi due esempi proposti come network soddisfano anche la definizione corretta? ■

Dimostriamo ora che in un network (con la giusta definizione!) si ha che $\sum_{a \in S_0^-} \phi(a) = \sum_{a \in P_0^+} \phi(a)$.

Dividiamo gli archi in 4 classi: A_1, A_2, A_3, A_4 :

A_1 contiene gli archi uscenti da S_0 ma non entranti in P_0

A_2 contiene gli archi entranti in P_0 ma non uscenti da S_0

A_3 contiene gli archi uscenti ed entranti in vertici di $V \setminus \{S_0, P_0\}$

A_4 contiene gli archi che vanno da S_0 a P_0

Questi insiemi sono tra loro disgiunti. Per convincersene, disegniamo il “grafo più generale possibile”, raggruppando però tutti i vertici di $V \setminus \{S_0, P_0\}$ in un unico “macro-vertice”:

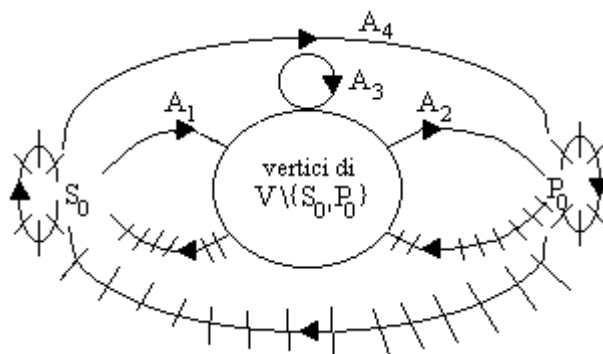


Figura 5.5

Nella figura sono “cancellati” gli archi proibiti dalla definizione di network. Come si vede, restano effettivamente solo gli archi di A_1, A_2, A_3, A_4 . Ed è anche evidente che questi insiemi di vertici sono tra loro disgiunti.

Ora non resta che applicare la legge di Kirchoff ad ogni vertice e sfruttare quanto abbiamo appena detto.

Legge di Kirchoff:

$$\forall v \in V \setminus \{S_0, P_0\}, \quad \sum_{a \in v^-} \phi(a) = \sum_{a \in v^+} \phi(a)$$

Sommando “membro a membro” queste equazioni al variare di $v \in V \setminus \{S_0, P_0\}$, abbiamo:

$$\sum_{v \in V \setminus \{S_0, P_0\}} \sum_{a \in v^-} \phi(a) = \sum_{v \in V \setminus \{S_0, P_0\}} \sum_{a \in v^+} \phi(a)$$

Tenendo conto della decomposizione fatta (vedasi anche la figura precedente), si ha:

$$\sum_{a \in A_1 \cup A_3} \phi(a) = \sum_{a \in A_2 \cup A_3} \phi(a)$$

(essendo A_1 ed A_3 disgiunti tra loro, così come A_2 ed A_3 , possiamo decomporre le sommatorie:

$$\sum_{a \in A_1} \phi(a) + \sum_{a \in A_3} \phi(a) = \sum_{a \in A_2} \phi(a) + \sum_{a \in A_1} \phi(a)$$

possiamo “cancellare” i termini uguali ed aggiungere ad entrambi i membri la stessa quantità:

$$\sum_{a \in A_1} \phi(a) + \sum_{a \in A_3} \phi(a) = \sum_{a \in A_2} \phi(a) + \sum_{a \in A_4} \phi(a)$$

Cioè:

$$\sum_{a \in A_1 \cup A_3} \phi(a) = \sum_{a \in A_2 \cup A_4} \phi(a)$$

Ovverossia:

$$\sum_{a \in S_0^-} \phi(a) = \sum_{a \in P_0^+} \phi(a)$$

Tornando ai flussi su un network, un problema interessante è chiedersi quale sia il “flusso massimo” che possiamo far passare su un network assegnato. Osservo che potrebbe non essere ovvio cosa voglia dire “flusso massimo”. Infatti, un flusso non è un numero, bensì una funzione (che, se vogliamo, individua un vettore di numeri reali, tanti quanti sono gli archi del network). In realtà, ciò che ci interessa è trovare un flusso il cui *valore* sia massimo. Volendo formalizzare, possiamo indicare con Φ l’insieme dei flussi (ammisibili) su un network R fissato. Se indichiamo con $\text{val}(\phi)$ il valore del flusso ϕ , risulta individuata la funzione $\text{val} : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$. E’ questa la funzione che vogliamo massimizzare.

Ciò che forse non è evidente a prima vista è che questo è un problema di “programmazione lineare”.

Sia $R = (V, A, f, S_0, P_0)$ un network. Poiché V è finito, anche A è finito¹⁰ ed allora possiamo scrivere $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Detto altrimenti, possiamo numerare gli archi di R . Per renderci la vita un poco più agevole, possiamo supporre¹¹ che sia $S_0^- = \{a_1, \dots, a_m\}$, dove $m \leq n$. Cioè: cominciamo ad

¹⁰perché?

¹¹senza ledere la generalità, come si usa dire

enumerare gli archi da quelli uscenti da S_0 .

Possiamo allora identificare un flusso $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ con il vettore $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$.

Che per comodità indicherò con $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Visto che $\text{val}(\phi) = \sum_{a \in S_0^-} \phi(a) = \sum_{i=1}^m \phi(a_i)$, avrò che $\text{val}(\phi) = \sum_{i=1}^m x_i$

Tenendo conto delle condizioni che identificano un flusso ammissibile, posso identificare $\hat{\Phi}$ (l'insieme dei flussi ammissibili) con:

$$\hat{\Phi} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \forall i; x_i \leq \hat{f}_i \forall i; \sum_{j \in v^-} x_j = \sum_{k \in v^+} x_k \forall v \in V \setminus \{S_0, P_0\}\}$$

Ho indicato $f(a_i)$ con \hat{f}_i .

Ebbene, il problema: *****da scrivere

è un problema di programmazione lineare perché la funzione che cerchiamo di massimizzare è una funzione lineare (nelle variabili x_1, \dots, x_n) ed i *vincoli* (cioè: le disuguaglianze che individuano $\hat{\Phi}$) sono *lineari*.

Esempio 5.3 Sia R individuato dalla figura a lato.

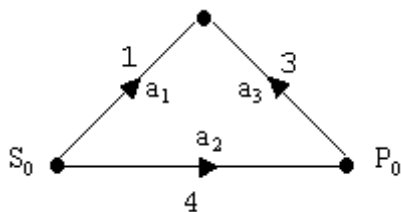


Figura 5.6

Come si vede, gli archi sono stati enumerati a_1, a_2, a_3 (si noti che i primi sono quelli uscenti da S_0). Un flusso (ammissibile) su R è identificato da (x_1, x_2, x_3) , con x_i che rappresenta $f(a_i)$, ovverossia il flusso che passa sull'arco a_i .

Abbiamo allora che il valore del flusso è $x_1 + x_2$. E che

$$\hat{\Phi} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0 \forall i; x_1 \leq 1, x_2 \leq 4, x_3 \leq 3; x_1 = x_3\}$$

Possiamo disegnare $\hat{\Phi}$:

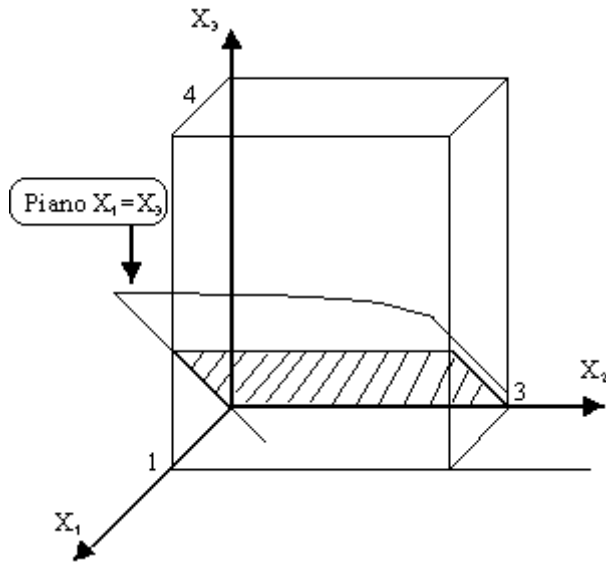


Figura 5.7

$\hat{\Phi}$ é la parte tratteggiata. Intersezione del parallelepipedo (che é individuato dai vincoli di capacità dei lati oltre che dalle condizioni $x_i \geq 0$) e dal piano $x_1 = x_3$ che esprime il vincolo dato dalla legge di Kirchoff. ■

Vediamo di applicare questa idea al calcolo del flusso massimo in un paio di esempi. L'aver ridotto il problema ad un problema di programmazione lineare ci permette di applicare metodi numerici all'uopo predisposti, come ad esempio il "metodo del simplesso". Anzi, data l'importanza dei problemi di programmazione lineare, sono disponibili numerosi programmi (packages) già predisposti. Useremo il programma di calcolo simbolico e numerico "Maple V", che fornisce una implementazione del "metodo del simplesso" per la soluzione di un problema di programmazione lineare.

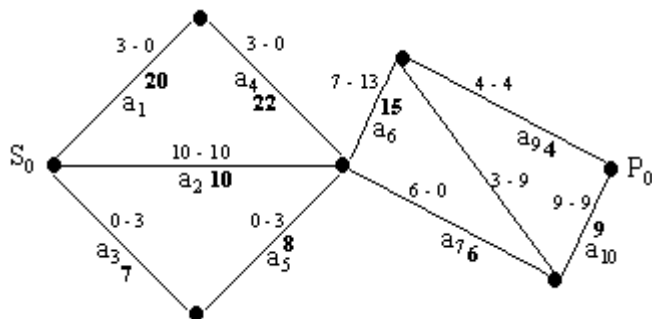


Figura 5.8

Le capacità degli archi sono scritte sotto all'arco corrispondente. Le frecce sugli archi non sono state disegnate. Vanno tutte "da sinistra verso destra". La variabile x_k usata nel programma indica il flusso che passa nell'arco a_k del disegno.

Le soluzioni (i valori del flusso di MYFLOW1 sono scritti sopra all'arco corrispondente, a sinistra. Quelli di MYFLOW2 sono scritte a destra.

MYFLOW1 massimizza il flusso uscente da S_0

MYFLOW2 massimizza il flusso entrante in P_0

```

> # file MYFLOW 1.MWS
> with(simplex:) Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
> vincoli := { $x_1 \leq 20$ ,  $x_2 \leq 10$ ,  $x_3 \leq 7$ ,  $x_4 \leq 22$ ,  $x_5 \leq 8$ ,  $x_6 \leq 15$ ,  $x_7 \leq 6$ ,  $x_8 \leq 9$ ,  $x_9 \leq 4$ ,  $x_1 - x_4 = 0$ ,  $x_3 - x_5 = 0$ ,  $x_2 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 = 0$ ,  $x_6 - x_8 - x_9 = 0$ ,  $x_7 + x_8 - x_{10} = 0$  }
> obiettivo :=  $x_1 + x_2 + x_3$  :
> maximize (obiettivo, vincoli, NONNEGATIVE);
{ $x_4 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_9 = 4$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_8 = 9$ ,  $x_6 = 13$ ,  $x_7 = 0$ ,  $x_5 = 3$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_{10} = 9$ }

```

```

; # file MYFLOW 2.MWS
> with(simplex:) Warning, new definition for basis
Warning, new definition for convexhull
Warning, new definition for cterm
Warning, new definition for display
Warning, new definition for dual
Warning, new definition for feasible
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for pivotvar
Warning, new definition for ratio
Warning, new definition for setup
> vincoli := {x1 ≤ 20, x2 ≤ 10, x3 ≤ 7, x4 ≤ 22, x5 ≤ 8, x6 ≤ 15, x7 ≤
6, x8 ≤ 9, x9 ≤ 4, x10 ≤ 9, x1 - x4 = 0, x3 - x5 = 0, x2 + x4 + x5 - x6 - x7 =
0, x6 - x8 - x9 = 0, x7 + x8 - x10 = 0 };
obiettivo:= x9 + x10 :
> maximize (obiettivo, vincoli NONNEGATIVE);
{x4 = 3, x5 = 0, x3 = 0, x9 = 4, x7 = 6, x2 = 10, x6 = 7, x8 = 3, x1 =
3, x10 = 9}

```

Si noti che i due programmi danno risultati diversi per quanto riguarda il flusso che dà il valore massimo (ma per fortuna il valore del flusso è lo stesso!). La ragione di ciò sta nel fatto che vi è più di un flusso che dà il valore massimo e i due programmi, essendo predisposti per risolvere due problemi diversi (benché equivalenti, come ben sappiamo), applicano il metodo del simplesso seguendo due strade diverse.

*****disegno

Per le didascalie, rinvio all'altro esempio.

MYFLOW3 massimizza il flusso uscente da S_0

Le tre versioni stampate del file MYFLOW3 rappresentano rispettivamente: il

“programma” per “Maple V” prima della sua esecuzione

il “programma” per “Maple V” dopo la prima esecuzione

il “programma” per “Maple V” dopo un'ulteriore esecuzione

I “warning” che compaiono sono dovuti al fatto che l'istruzione `with simplex`

“chiama” un package aggiuntivo il quale ha l'effetto di modificare il significato di funzioni standard di “Maple V” quali ad esempio `maximize`.

```
> # file MYFLOW 3.MWS
> with(simplex:)
> vincoli := { $x_1 \leq 2$ ,  $x_2 \leq 2$ ,  $x_3 \leq 3$ ,  $x_4 \leq 3$ ,  $x_5 \leq 2$ ,  $x_6 \leq 2$ ,  $x_7 \leq 1$ ,  $x_8 \leq 1$ ,  $x_1 - x_2 - x_8 = 0$ ,  $x_2 + x_7 - x_3$ ,  $x_4 - x_5 - x_7 = 0$ ,  $x_5 + x_8 - x_6 = 0$ }:
> obiettivo :=  $x_1 + x_4$  :
> maximize (obiettivo, vincoli NONNEGATIVE);
```



```

‡ file MYFLOW 3.MWS
> with(simplex:)
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
> vincoli := { $x_1 \leq 2$ ,  $x_2 \leq 2$ ,  $x_3 \leq 3$ ,  $x_4 \leq 3$ ,  $x_5 \leq 2$ ,  $x_6 \leq 2$ ,  $x_7 \leq$ 
1,  $x_8 \leq 1$ ,  $x_1 - x_2 - x_8 = 0$ ,  $x_2 + x_7 - x_3$ ,  $x_4 - x_5 - x_7 = 0$ ,  $x_5 + x_8 - x_6 = 0$ }:
> obiettivo :=  $x_1 + x_4$  :
> (obiettivo, vincoli NONNEGATIVE);
{  $x_1 = 2$ ,  $x_5 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_8 = 0$ ,  $x_7 = 1$ ,  $x_6 = 2$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_4 = 3$  }

```

```

> # file MYFLOW 3.MWS
> with(simplex:) Warning, new definition for basis
Warning, new definition for convexhull
Warning, new definition for cterm
Warning, new definition for display
Warning, new definition for dual
Warning, new definition for feasible
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for pivotvar
Warning, new definition for ratio
Warning, new definition for setup
> vincoli := { $x_1 \leq 2$ ,  $x_2 \leq 2$ ,  $x_3 \leq 3$ ,  $x_4 \leq 3$ ,  $x_5 \leq 2$ ,  $x_6 \leq 2$ ,  $x_7 \leq$ 
1,  $x_8 \leq 1$ ,  $x_1 - x_2 - x_8 = 0$ ,  $x_3 - x_5 = 0$ ,  $x_2 + x_7 - x_3 = 0$ ,  $x_4 - x_5 - x_7 =$ 
0,  $x_5 - x_8 - x_6 = 0$  }:
> obiettivo :=  $x_1 + x_4$ 
> maximize (obiettivo, vincoli, NONNEGATIVE);
{ $x_1 = 2$ ,  $x_5 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_8 = 0$ ,  $x_7 = 1$ ,  $x_6 = 2$   $x_2 = 2$ ,  $x_4 = 3$  }

```

Un commento finale.

Quando si costruisce un modello matematico può essere utile, interessante, vedere diverse rappresentazioni del modello.

Questo è quanto abbiamo fatto col problema della ricerca del flusso massimo. Abbiamo trasformato il problema in uno di programmazione lineare. Questo ci permette ad esempio di utilizzare il copioso software esistente per problemi di programmazione lineare (e l'esempio in cui usiamo "Maple V" è solo uno dei tanti possibili: si noti che in realtà esistono algoritmi "ad hoc" per risolvere i problemi di flusso massimo, che sono problemi *particolari* di programmazione lineare¹²).

L'utilità di "vedere" il problema di ricerca del flusso massimo come problema di programmazione lineare non sta solo nel fatto che possiamo usare algoritmi per la soluzione. Possiamo ad esempio usare il teorema generale di dualità della programmazione lineare e chiederci che cosa "significhi" nel caso particolare di un network. Ebbene, esso ci dà il famoso teorema di Ford e Fulkerson: "max flow = min cut". Vale a dire, il valore massimo del flusso è uguale alla capacità minima di un "taglio". Non è qui il caso di descrivere in dettaglio questo risultato, che può essere reperito sui molti testi specializzati disponibili¹³. Ho citato questo fatto per corroborare l'affermazione che è molto utile e può fornire intuizioni inaspettate, avere a disposizione rappresentazioni equivalenti di un problema.

A questo proposito, vorrei introdurre una *nuova rappresentazione* per un grafo orientato. Se uno ci pensa un attimo, si ricorda che un grafo orientato non è altro che una relazione sull'insieme (finito) V . Ora, data una relazione su V possiamo costruire una *matrice* che la identifica. basta mettere 1 nella casella individuata dalla riga v_i e dalla colonna v_j se v_i è in relazione con v_j . E invece mettere 0 se non sono in relazione.

Allora, avere il grafo rappresentato a sinistra oppure la matrice di destra è equivalente. Nel senso che possiamo passare (univocamente) dall'uno all'altra.

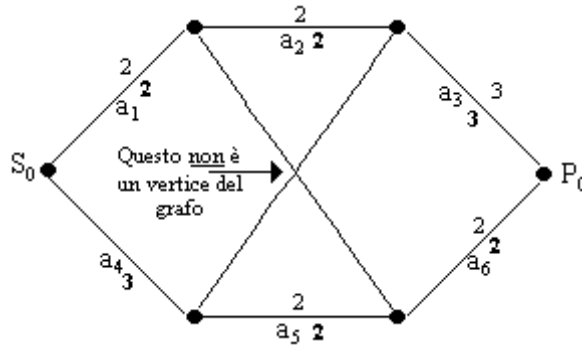
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0	1
v_3	0	0	0	1	0
v_4	0	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

Possiamo anche usare una matrice per identi-

ficare direttamente un network. Basta che al posto degli "1" mettiamo la *capacità* dell'arco. Ad esempio, il network di sinistra può essere rappresentato dalla matrice di destra:

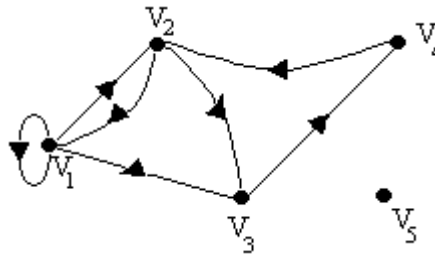
¹²Ad esempio: la funzione obiettivo ha coefficienti solo 1 o 0. Se il network è *particolarmente* complesso, conviene usare software "ad hoc"

¹³Vedasi, ad esempio: Preparata e Yeh*****, oppure Bollobas*****



	S_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	P_0
S_0	0	20	7	10	0	0	0
v_1	0	0	0	22	0	0	0
v_2	0	0	0	8	0	0	0
v_3	0	0	0	0	15	6	0
v_4	0	1	0	0	0	9	4
v_5	0	-	-	-	-	-	-
P_0	0	-	-	-	-	-	-

Nella matrice si riconosce subito la



sorgente (c'è una colonna di zeri) ed il pozzo (c'è una riga di zeri)'. Ma si vede anche chiaramente che il grafo è fatto "di due pezzi attaccati assieme" (vedasi i due blocchi di zeri nella matrice).

Può valere la pena chiedersi se possiamo dare una rappresentazione della legge di Kirchoff in termini della matrice.

Ma la rappresentazione matriciale ci suggerisce cose nuove. Ad esempio, che possiamo *sommare* due matrici e, quindi, due network. Più in generale, potremmo pensare di applicare metodi algebrici ai grafi ed ai network. Non è certo un'idea nuova (vedasi ad esempio Bollobas*****). Ma il fine di queste note non è certo l'originalità: è vedere come possa essere utile avere varie "viste" matematiche di uno stesso oggetto e come queste ci permettano di immaginare relazioni che non erano facilmente immaginabili se uno restava solo con la rappresentazione originaria.

Come esempio si può citare il Teorema 5, pag. 156, di Bollobas*****. Che mette in relazione(*****) gli *autovalori* della matrice fatta di $0-1$

(detta matrice di incidenza) che si può associare, come visto, ad un grafo. Si noti che il teorema citato si riferisce a grafi *non orientati*. In termini matriciali, ad una matrice *simmetrica*.

6 Vincoli...

Problema 6.1 Delle palline da ping-pong cadono in una scatola al ritmo di una al secondo. Quante palline contiene la scatola dopo un giorno? ■

Problema 6.2 Ad uno studente di Modelli Matematici piace la Nutella. La mangia al ritmo di 5 cucchiaini al minuto (vale a dire: 25g al minuto). Quanta Nutella avrà mangiato dopo 3 ore? E dopo un giorno? E in una settimana? ■

Problema 6.3 Per effetto delle piogge recenti, da un angolo del tetto (che si trova ad un'altezza di 5 metri dal suolo) cade ogni 5 secondi una goccia, il cui volume è pari a 10mm^3 . Questa goccia va a cadere in un vaso da fiori vuoto. Sapendo che il suo volume è di 1dm^3 , quanto tempo occorrerà per riempirlo? E se invece c'è una ciotola di 50cm^3 ? E qualora vi fosse un barile di 100dm^3 ? ■

7 Discreto e continuo

Problema 7.1 Ho una scatola di forma cubica di lato L , che riempio con scatolette le cui misure sono: larghezza a , lunghezza b , altezza c . Quante di queste scatolette ci posso mettere? ■

Problema 7.2 Abbiamo una popolazione di 1 milione di individui, che diminuisce al tasso del 10% ogni ora. Si estinguerà? E se sì, quando? ■

Problema 7.3 Dovete dire quante palline da ping-pong si trovano in un contenitore di forma cubica, nel quale sono disposte in modo ben ordinato (potete supporre così:

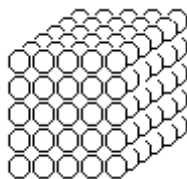


Figura 7.1

,cioè, una sopra l'altra). Il contenitore è pieno, nel senso che non ce se ne possono mettere altre, rispettando l'ordine col quale sono sistemate. Avete 15 minuti per dare la risposta e non potete effettuare un errore maggiore del 5%. Che strategia adottate se il lato della scatola è lungo l metri, nei casi in cui l sia pari a: 0.1, 1, 10, 100, 1000? ■

8 Giochi non cooperativi

Definizione 8.1 *Gioco non cooperativo in forma strategica (o normale) a due giocatori è $\Gamma = (X, Y, f, g)$, dove X, Y sono insiemi ed $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$.*

Esempio 8.1

$I \backslash II$	L	R
T	10, 10	0, 0
B	0, 0	5, 5

Qui $X = \{T, B\}$, $Y = \{L, R\}$, $f(T, L) = 10$, $g(T, L) = 10$, $f(T, R) = 0$, $g(T, R) = 0$, etc. ■

Esempio 8.2 $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $g(x, y) = y^2 - x^2$. ■

Definizione 8.2 *Sia dato $\Gamma = (X, Y, f, g)$. Diremo che:*

- $\bar{x} \in X$ è strategia dominante per il giocatore I se $f(\bar{x}, y) \geq f(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$.
- $\bar{y} \in Y$ è strategia dominante per il giocatore II se $g(x, \bar{y}) \geq g(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$.
- (\bar{x}, \bar{y}) è un equilibrio di Nash se:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$$

Esercizio 8.1 Dimostrare che, se \bar{x} ed \bar{y} sono strategie dominanti, allora (\bar{x}, \bar{y}) è un equilibrio di Nash. ■

Osservazione 8.1 Il fatto che \bar{x} ed \bar{y} siano strategie dominanti non garantisce che (\bar{x}, \bar{y}) sia una coppia di strategie efficienti. Ricordo che una coppia di strategie $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ si dice efficiente (nel senso di Pareto) se *non esiste* $(x, y) \in X \times Y$ t.c.:

$$f(x, y) > f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$g(x, y) > g(\bar{x}, \bar{y})$$

■

Esempio 8.3 [Dilemma del prigioniero]	$I \backslash II$	L	R
	T	3, 3	0, 5
	B	5, 0	1, 1

Le strategie B ed R sono dominanti, rispettivamente per I e per II . Ma $f(T, L) = 3 > 1 = f(B, L)$ ed analogamente $g(T, L) = 3 > 1 = g(B, L)$.

■

Esempio 8.4 [Battaglia dei sessi]	$I \backslash II$	L	R
	T	2, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 2

(T, L) e (B, R) sono *due* equilibri di Nash. Ma il giocatore I preferisce l'esito derivante da (T, L) a quello derivante da (B, R) , Viceversa per il giocatore II .

■

Un altro gioco che ha problemi simili alla “battaglia dei sessi” è il gioco di puro coordinamento.

Esempio 8.5	$I \backslash II$	L	R
	T	1, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 1

Questo sopra è l'esempio più semplice di gioco di coordinamento. Può essere generalizzato al caso di n giocatori. Oppure al caso in cui vi siano più di due esiti indifferenti.

Qui il problema deriva dal fatto che i due giocatori devono scegliere contemporaneamente¹⁴ la strategia da usare.

Si noti che in questo caso esiste una coppia di strategie (\bar{x}, \bar{y}) che rende massima contemporaneamente f e g !! Sfortunatamente, questa coppia non è unica. ■

L'esempio della “battaglia dei sessi” mostra come un gioco possa avere più di un equilibrio. Di per sé, questo non sarebbe drammatico. Quando si cerca il massimo (assoluto) di una funzione, può benissimo essere che questo sia assunto in più di un punto. Ciò a volte può rendere meno facile o meno veloce la determinazione numerica di un punto di minimo. Ma, a parte questo,

¹⁴Da un punto di vista informativo, non necessariamente temporale. Cioè, può essere che prima sceglie I e poi sceglie II . Ma se ciò accade, assumiamo che II non sia informato della scelta fatta da I . Se lo fosse, il modello sarebbe *diverso*.

non vi sono altri problemi gravi se sono interessato al valore massimo della funzione. Cioè, se sono interessato ad ottenere il valore massimo: vorrò dire che avrò due (o più) modi diversi per ottenerlo¹⁵.

Ciò che capita invece nella “battaglia dei sessi” è che i due equilibri di Nash danno luogo a due risultati molto diversi. In particolare, I preferisce il risultato derivante da (T, L) , mentre II preferisce l’altro.

¹⁵Diverso è se io sono interessato al *punto* di massimo. Ad esempio, mi può interessare il punto di minimo di una funzione potenziale perché mi dice dove trovo una certa particella.

9 TU games

Definizione 9.1 *Dicesi gioco cooperativo “ad utilità trasferibile” in forma caratteristica, la coppia (N, v) . Dove N è un insieme finito. E dove $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ è una applicazione t.c. $v(\emptyset) = 0$.*

Un sottoinsieme S di N (cioè un elemento di $\mathcal{P}(N)$) si dice “coalizione”. I giochi a utilità trasferibile, detti anche giochi (cooperativi) a pagamenti laterali (side-payment games), sono la classe più semplice di giochi cooperativi rappresentabili in forma caratteristica.

L’interpretazione più semplice ed immediata è quella di pensare che (N è ovviamente l’insieme dei giocatori) ogni gruppo di giocatori S sia in grado di garantirsi (di ottenere) una somma di denaro, che indichiamo con $v(S)$. Naturalmente supponiamo che $S \subseteq N$. Ed è abbastanza naturale pensare che se $S = \emptyset$ (cioè non contiene elementi!) si possa assumere che v sia uguale a zero. I sottoinsiemi S di N vengono detti “coalizioni”. Vediamo un paio di esempi.

Esempio 9.1 [Gioco di maggioranza] Abbiamo $N = \{1, 2, 3\}$ e $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, mentre $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$. L’idea è che, per far passare una decisione (che vale 1 per il gruppo che riesce a farla passare) sia necessaria la maggioranza di N . Ovviamente questo esempio può essere generalizzato, sia considerando un insieme N qualsiasi, sia fissando in modo opportuno la quota necessaria per far passare la decisione (es. maggioranza semplice, oppure una qualche forma di maggioranza qualificata). ■

Esempio 9.2 [Gioco dei guanti] Abbiamo un insieme N di giocatori, che è partizionato in due sottoinsiemi L (i giocatori che possiedono esattamente un guanto sinistro ciascuno) ed R (i giocatori che possiedono esattamente un guanto destro ciascuno). Ovviamente $N = L \cup R$ e $L \cap R = \emptyset$. Data una coalizione S , $v(S)$ è uguale al numero di paia di guanti che gli elementi di S riescono a formare. Ad esempio se in S ci sono 3 elementi di L e 5 elementi di R , si ha $v(S) = 3$, perchè riescono a formare 3 paia di guanti (e ne avanzano due destri). ■

Una importante classe di TU-games è costituita dai giochi superadditivi.

Definizione 9.2 *Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. G si dice superadditivo se:*

$$\forall S, T \subseteq N \text{ t.c. } S \cap T = \emptyset : v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad (1)$$

L'interpretazione della condizione (1) è ovvia: traduce l'idea che "l'unione fa la forza". E' verificata spesso (es. sia il gioco di maggioranza che il gioco dei guanti soddisfano (1), come si può verificare). Naturalmente non è scontata in ogni situazione: può succedere che S e T siano coalizioni portatrici di interessi tra loro conflittuali e che quindi la coalizione $S \cup T$ venga "penalizzata" da contrasti interni o che comunque abbia dei risultati inferiori a quelli che S e T potrebbero avere separatamente.

Una condizione meno restrittiva della superadditività consiste nel richiedere che il gioco sia coesivo.

Definizione 9.3 Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. G si dice coesivo se:

$$\text{per ogni } \{S_1, S_2, \dots, S_k\}, \text{ partizione di } N, \text{ si ha } v(N) \geq \sum_{i=1}^k v(S_i) \quad (2)$$

Esercizio 9.1 Sia dato $G = (N, v)$; provare che se soddisfa (1) allora soddisfa anche (2). Fornire un esempio di gioco coesivo che non sia superadditivo.

Come fa intuire l'esercizio (9.1) la condizione di essere coesivo è meno restrittiva della superadditività. Comunque, se un gioco è coesivo è ugualmente conveniente per i giocatori formare la "grande coalizione" N .

Una osservazione sulle notazioni. D'ora in poi supporremo di solito che sia $N = \{1, 2, \dots, n\}$. E useremo notazioni del tipo: $v(1)$, $v(i)$, $v(1, 2, 5)$, etc. invece di quelle corrette: $v(\{1\})$, $v(\{i\})$, $v(\{1, 2, 5\})$, etc.

A volte ci si imbatte in problemi in cui il dato che si ha, o che è più naturale considerare, rappresenta dei *costi*, anziché dei guadagni. Vale a dire: ad ogni coalizione S si può assegnare un numero $c(S)$ la cui interpretazione è quella di un costo associato alla coalizione S . Se si ha un gioco di costi, lo si può convertire in un gioco "normale", ad esempio definendo $v(S) = -c(S)$. Oppure si può lavorare direttamente nell'ambito dei giochi di costo¹⁶. Ovviamente le disuguaglianze si "invertiranno". Ad esempio, la condizione di superadditività avrà come naturale sostituta la subadditività. Il problema fondamentale, dato un gioco TU, è come "spartire i guadagni" tra i giocatori. Ovverossia, come spartire i costi per un gioco dei costi. Come vedremo, non c'è una indicazione univoca, o una regola "incontestabile". Vale anche per i giochi cooperativi quanto si può dire per i giochi non

¹⁶Ed è anche meglio, perchè la conversione non è scontata. Perchè uno può "convertire" il gioco di costi nel gioco "dei risparmi", definendo $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$. Ed è chiaro che, a parità di criterio applicato, si otterranno risultati diversi a seconda della conversione scelta.

cooperativi. La teoria non dice quale “deve essere” la soluzione, bensì analizza le proprietà delle diverse possibili soluzioni, mettendo in evidenza sia gli aspetti “positivi” che quelli “negativi”. Come di consueto, per esprimere più agevolmente e con maggiore precisione i concetti che ci interessano, avremo bisogno di un linguaggio appropriato. Introduciamo quindi la terminologia essenziale. Ci servirà, dato un insieme E finito, avere un simbolo per indicare il numero dei suoi elementi: useremo a tale fine il simbolo $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori. Per maggiore concisione, supporremo che sia $|N| = n$.

Definizione 9.4 *Sia $G = (N, v)$ un TU-game. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si dice allocazione (per G). Se $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ l'allocazione x si dice pre-imputazione. Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $x_i \geq \sum_{i=1}^n v(\{i\}) \forall i \in N$ è detta imputazione.*

L'interpretazione di una pre-imputazione è ovvia: si tratta di una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori. Ovviamente, il concetto di pre-imputazione è particolarmente interessante per i giochi coesivi (e quindi anche per quelli superadditivi): è per questa classe di giochi che è ragionevole immaginare che si formi la grande coalizione N e che quindi una “soluzione” debba consistere nello scegliere una (o più di una) possibile ripartizione di $v(N)$. Si noti che la condizione $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ può essere “letta” come esprime due condizioni contemporaneamente: $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(N)$ (che per i giochi coesivi rappresenta una condizione di fattibilità) e $\sum_{i=1}^n x_i \geq v(N)$ (che rappresenta invece una condizione di efficienza). Quest'ultima condizione viene anche indicata come condizione di “razionalità collettiva”. Da questo punto di vista, la condizione $x_i \geq v(\{i\})$ è interpretabile come condizione di “razionalità individuale” per il giocatore i .

Esercizio 9.2 *Trovare le imputazioni del gioco di maggioranza.*

Esercizio 9.3 *Provare che se (N, v) è coesivo, allora il gioco ha imputazioni.*

Indicheremo con $I(v)$ l'insieme delle imputazioni del gioco (N, v) . Come lascia intuire l'esercizio precedente, può essere che $I(v) = \emptyset$.

Esercizio 9.4 *Indicare un gioco (N, v) per il quale si abbia $I(v) = \emptyset$.*

Abbiamo introdotto, a livello di interpretazione, l'idea di razionalità collettiva e di razionalità individuale. Non occorre molta fantasia per pensare anche a condizioni di razionalità “intermedia”, che sono date evidentemente da condizioni del tipo: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, dove S è una generica “coalizione”. Questa idea elementare ci porta immediatamente ad uno dei concetti chiave di “soluzione” per un gioco TU: è l'idea di nucleo.

Definizione 9.5 Sia (N, v) un gioco TU. Indichiamo con $C(v)$ il nucleo del gioco, dove: $C(v) = \{x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N, \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$

Come è evidente dalla definizione e dalla discussione precedente, si ha: $C(v) \subseteq I(v)$. Abbiamo già notato che può essere $I(v) = \emptyset$, quindi a maggior ragione non ci stupiremo che possa essere $C(v) = \emptyset$. Quello che forse a prima vista è meno prevedibile, è che anche per un gioco superadditivo può essere $C(v) = \emptyset$.

Esempio 9.3 Consideriamo il gioco di maggioranza dell'esempio (9.1). Se vogliamo che $x \in \mathbb{R}^3$ stia in $C(v)$ deve essere:

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 1$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = 1$$

$$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 1$$

Sommando membro a membro si ottiene: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$. Ma questo è evidentemente incompatibile con la condizione $x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 1$. In termini intuitivi, ciò accade è che le coalizioni “intermedie” sono troppo forti relativamente alla grande coalizione. ■

Esercizio 9.5 Provare che il gioco dei guanti, con $|L| = 1000$ e $|R| = 1001$ ha una sola allocazione nel nucleo. Quale è?

Esercizio 9.6 Un TU-game (N, v) si dice semplice se $v(N) = 1$ e se $v(S)$ vale 0 oppure 1 per ogni coalizione S . Diremo che una coalizione S è vincente se $v(S) = 1$. Un giocatore che appartenga ad ogni coalizione vincente viene detto “veto-player”. Dimostrare che il nucleo di un gioco semplice è non vuoto se e solo se vi sono veto-player. Nel caso del Consiglio di Sicurezza dell'ONU, trovare gli elementi del nucleo.

Osservazione 9.1 Si noti¹⁷ che, per convenzione, $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$. Quindi se $S = \emptyset$ la condizione $\sum_{j \in \emptyset} x_j \geq v(\emptyset)$ è soddisfatta ($0 \geq 0$). Chissà se qualcuno l'aveva notato. ■

Come fanno intravedere gli esempi e gli esercizi, il nucleo di un gioco dà conto della forza dei vari giocatori (espressa attraverso $v(S)$). Tuttavia, ne tiene conto in modo per così dire “rigido”. Tanto è vero che nel gioco di maggioranza il nucleo è vuoto. Oppure, nel gioco dei guanti si ha una ripartizione dei “profitti” che sembra eccessivamente unilaterale. Ancora per i giochi semplici (in particolare, vedasi l'esempio dell'ONU), “tutto” il potere è nelle mani dei “veto-player”. A questi problemi se ne aggiunge un altro: il

¹⁷per la precisione...

nucleo di un gioco (se non vuoto) contiene in genere più di una allocazione. Quindi, il nucleo non ci offre “la” soluzione, bensì solo un modo per scartare, per così dire, allocazioni che sarebbero instabili (se $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, la coalizione S ha interesse a “defezionare” dalla grande coalizione N , se si insiste sulla ripartizione (x_1, x_2, \dots, x_n)).

Vi è un altro concetto di soluzione che viene incontro a questo tipo di obiezioni (ma “ovviamente” gliene potremo fare altre, di altro genere...): si tratta del cosiddetto “valore Shapley”.

Un modo per introdurre il valore Shapley è quello di usare la strada “assiomatica” già usata da Nash per i problemi di contrattazione. Ci chiediamo, cioè quali proprietà “debba” soddisfare un ragionevole criterio di allocazione di $v(N)$ tra i giocatori.

Un primo criterio, ovvio, è l’anonimità. Cioè, quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da “chi è” questo giocatore (cioè, se si tratta di Marco o Enrico), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri. Vediamo un esempio.

Esempio 9.4 Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = 4$; $v(2, 3) = 6$; $v(1, 2, 3) = 20$

Consideriamo ora un altro gioco, w , che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori: $w(1) = w(2) = w(3) = 0$; $w(2, 3) = w(1, 3) = 4$; $w(1, 2) = 6$; $w(1, 2, 3) = 20$. Che differenza c’è tra il gioco v e quello w ? Che in w il giocatore 3 si trova nella identica situazione in cui il giocatore 1 si trovava nel gioco v . L’idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco w , esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco v . Si noti che in questo esempio abbiamo usato notazioni SCORRETTE. Dovremmo scrivere $v(\{1\})$ invece di $v(1)$, $v(\{1, 2\})$ invece di $v(1, 2)$, ecc. Ma tutti fanno così, perchè è così noioso scrivere tutte quelle parentesi graffe... ■

Non ci resta che formalizzare il tutto.

Indichiamo con $\mathcal{G}(N)$ l’insieme di tutti i giochi (N, v) che sono definiti sull’insieme di giocatori N . Diciamo “valore” una funzione $\Phi : \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $n = |N|$. Vale a dire, un “valore” è una regola che ad ogni gioco avente N come insieme dei giocatori associa una allocazione.

Sia $\sigma : N \rightarrow N$ una permutazione di N . Ad esempio $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$. Dato un gioco v su N , indichiamo con σv il gioco seguente: $\sigma v(S) = v(\sigma(S))$

Esempio 9.5 Sia $N = \{1, 2, 3\}$. Prendiamo $\sigma : N \rightarrow N$ così definita: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$. Se $S = \{1, 2\}$, abbiamo che $\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$. Quindi, $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$. Se prendiamo

$T = \{2, 3\}$, abbiamo che $\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$. Quindi, $\sigma v(2, 3) = v(1, 2)$. Dovrebbe essere evidente che il gioco w nell'esempio precedente non è altro che il gioco σv , essendo σ la permutazione che stiamo considerando (quella che scambia 1 con 3). ■

L'idea è ovviamente di chiedere che:

Assioma 9.1 (Anonimità) *Sia v un gioco e $\sigma : N \rightarrow N$ una permutazione. Allora, $\Phi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \Phi_i(v)$.*

Cioè nell'esempio: sia $i = 1$. Allora $\sigma(i) = \sigma(1) = 3$. Vogliamo quindi che $\Phi_3(\sigma v) = \Phi_3(w) = \Phi_1(v)$. Cioè quel che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco v , deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco w .

Un'altra condizione che imponiamo a Φ è la seguente:

Assioma 9.2 (Efficienza) *Per ogni gioco v , $\Phi(v)$ è una pre-imputazione.*

L'interpretazione di questo assioma è ovvio, deve essere $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$. Quindi, il "valore" Φ deve ripartire tra i giocatori quello che riesce ad ottenere la grande coalizione.

Per introdurre l'assioma successivo abbiamo bisogno di dire cos'è il contributo marginale di un giocatore. Se S è una coalizione, ed $i \in S$, il numero reale $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S . Se si ha che $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i)$ per ogni coalizione S che non contiene i , il giocatore i viene detto "dummy player". In altri termini, se ad una coalizione S si aggiunge il giocatore i , ciò non ha alcun effetto particolarmente significativo: il giocatore i si porta dietro la sua dote ma il suo arrivo nella coalizione S non provoca alcun guadagno ulteriore.

Assioma 9.3 (Dummy player) *Se in un gioco v il giocatore i è un "dummy player", allora $\Phi_i(v) = v(i)$.*

L'ultima condizione è molto facile da enunciare:

Assioma 9.4 (Additività) $\Phi_i(v + w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$, per ogni $i \in N$.

Dei quattro assiomi quest'ultimo è il più discutibile, in quanto sommare due giochi può produrre un terzo gioco in cui la posizione "strategica" del giocatore i potrebbe essere difficilmente correlata a quella che lui ha nei due giochi "addendi".

Teorema 9.1 (Shapley, 1953) *Esiste ed è unica $\Phi : \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa gli assiomi 1, 2, 3, 4. Inoltre, si ha:*

$$\Phi_i(v) = \left(\frac{1}{n!}\right) \sum_{\sigma} m_i^{\sigma}(v) \text{ per ogni } i \in N$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^{\sigma}(v)$. L'idea è semplice $\sigma : N \rightarrow N$ è una permutazione. Consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Essendo $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$. Consideriamo allora la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\}$. E la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$. Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i . Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\}$. E $m_i^{\sigma}(v)$ indica esattamente ciò: $m_i^{\sigma}(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\})$ dove $i = \sigma(j)$.

La formula ha una interpretazione probabilistica. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione σ . Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra. E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che $n!$ è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi).

La formula data può naturalmente essere usata per calcolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è $10! = 3.628.800$ e quindi se abbiamo un gioco con 10 giocatori questo è il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula.

Se il gioco è “piccolo”, la formula ci permette di calcolare il valore Shapley abbastanza facilmente. Vediamo un esempio.

Esempio 9.6 Consideriamo il gioco introdotto nell'esempio 9.4. Cioè: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = 4$; $v(2, 3) = 6$; $v(1, 2, 3) = 20$

Costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna “intestata” con i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia $3!$), vale a dire il valore Shapley. Si noti che $\Phi_2 = \Phi_3$.

permutazione	1	2	3
123	0	4	16
132	0	16	4
213	4	0	16
231	14	0	6
312	4	16	0
321	14	6	0
totale	36	42	42
valore Shapley	6	7	7

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore Shapley molto più semplicemente, pur di sfruttare caratteristiche specifiche del gioco.

Esempio 9.7 [Gioco dell'aeroporto] Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aereo che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche: si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano.

Gli aerei¹⁸ possono essere raggruppati a seconda della lunghezza di pista necessaria in t sottoinsiemi disgiunti N_1, N_2, \dots, N_t in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedano una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$.

Otteniamo un gioco (dei costi) assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'aereo più grosso della coalizione, cioè:

$$v(S) = C_{j(S)} \quad \text{dove} \quad j(S) = \max\{i | S \cap N_i \neq \emptyset\}$$

. Si può dimostrare che il valore Shapley di ogni aereo corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poiché tutti gli aerei lo utilizzano
- il costo del secondo tratto ($C_2 - C_1$) è diviso tra gli aerei che lo utilizzano, ovverossia quelli di $N_2 \cup \dots \cup N_t$
- etc.
- l'ultimo tratto, di costo $C_t - C_{t-1}$ è suddiviso tra gli aerei del gruppo N_t che sono gli unici ad usarlo

¹⁸più propriamente: gli atterraggi che avvengono in una data unità di tempo, ad esempio un anno (in tal caso, per quanto riguarda i costi di costruzione, verrà considerata la quota annua di ammortamento)

Questa regola ha il pregio di essere meno dispendiosa in termini di calcoli richiesti. Per di più ha anche una ovvia interpretazione, che è interessante di per sé: ovverossia, il costo di ogni tratto di pista è equamente ripartito tra tutti e soli gli apparecchi che lo utilizzano. Vale a dire, ciascuno paga solo per il servizio che usa effettivamente. Non solo, ma ognuno contribuisce in ugual misura perchè ognuno lo utilizza in ugual misura. Si tratta di un principio generale, applicabile nel caso di costi (o guadagni) decomponibili. Un gioco di costo si dice *decomponibile* (in componenti di costo) se abbiamo un insieme R ¹⁹ t.c. ad ogni $r \in R$ possiamo associare un numero reale C_r ed un sottoinsieme T_r di N (il significato di C_r è quello del èmpncosto di questa componente e T_r è l'insieme dei *responsabili* di questo elemento di costo) tali che:

$$\forall S \subseteq N, c(S) = \sum_{S \cap T_r \neq \emptyset} C_r.$$

Il “principio di decomposizione” dice che ogni qual volta una funzione di costo è decomponibile in elementi di costo, il costo di ciascuno di questi elementi venga diviso in parti uguali tra i beneficiari (o responsabili).

Non è difficile verificare che il “principio di decomposizione” offre come soluzione, per ogni gioco che sia decomponibile, esattamente il valore Shapley. L'additività implicita nel principio di decomposizione ci dice che è sufficiente vedere cosa succede nel caso di un unico elemento di costo. L'idea che questo vada diviso ugualmente tra i beneficiari (e solo tra loro) rende conto sia della proprietà di simmetria che della “dummy player property”. La condizione di efficienza la leggiamo nel fatto che il costo dell'elemento è diviso tra i beneficiari, senza che nulla avanzi o manchi.

Il principio di decomposizione può essere generalizzato, qualora ad ogni elemento di costo sia possibile associare oltre all'insieme dei beneficiari anche, per ciascuno di costoro, una “percentuale di utilizzazione”. Ovviamente in questo modo non si ottiene il valore Shapley (è violata la simmetria).

L'approccio seguito da Shapley è detto “assiomatico”, in quanto si impongono condizioni (o “assiomi”) e si cerca poi di capire quali conseguenze ne derivino.

Questo approccio può essere utilizzato in ambiti molto diversi da quelli dei giochi cooperativi. Ad esempio, per i giochi non cooperativi (caratterizzazione assiomatica di Peleg e Tijs**** per l'equilibrio di Nash). Ma anche in ottimizzazione (ad esempio, la caratterizzazione delle soluzioni di massimo “approssimate” data da Norde, Patrone e Tijs****).

Ancora, in ambiti più lontani: caratterizzare misure “estensive” come la massa o la lunghezza. Un ottimo riferimento, a questo proposito, è il libro di Roberts****. Si può vedere in particolare il teorema di Roberts e Luce, che viene riportato a pag. 28 di Roberts****.

Oppure, ancora in un altro ambito: perché privilegiare il metodo dei “min-

¹⁹che supporremo finito. Gli elementi di R sono gli elementi di costo.

imi quadrati” e non quello “dei minimi in valori assoluti”? Ci vuole poco a vedere come, ad esempio, questo criterio (minimizzare $\sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$) *non* soddisfi una condizione ragionevole: ovvero di essere sensibile a una *nuova* misurazione che non sia “conforme” alle precedenti²⁰.

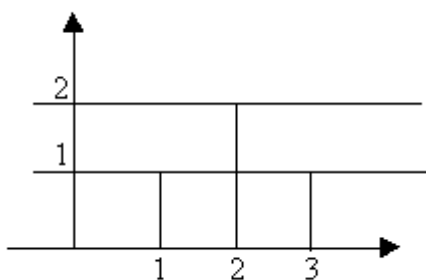


Figura 9.1

Se ho $(x_1, y_1) = (1, 1)$ ed $(x_2, y_2) = (3, 1)$, si vede immediatamente che sia il metodo dei minimi quadrati che quello dei “minimi in valori assoluti” ci danno come soluzione $a = 0$ e $b = 1$. Ovverossia, la retta $y = 1$. Se aggiungo il dato $(x_3, y_3) = (2, 2)$, che è “difforme”, la retta dei “minimi in valore assoluto” non si sposta (verificarlo!). Invece, la retta dei minimi quadrati diventa $y = 4/3$ (verificarlo). Il che mostra come l’aggiunta di un nuovo dato venga “sentito” da questo metodo. Si noti che la retta dei minimi quadrati si è spostata “verso” il nuovo dato (a priori, dicendo che la retta doveva risentire del nuovo dato, avremmo anche potuto intendere che ne risentiva in modo perverso, cioè “a rovescio”)

²⁰Lascio nel vago questa nozione. Ovviamente occorrerebbe formalizzarla, ma soprattutto bisognerebbe formalizzare con attenzione l’ambito nel quale ci si pone

10 Equazioni differenziali, integrali, funzionali

Lo scopo di questo paragrafo è duplice.

Un primo obiettivo è quello di far vedere come esistano diversi modi di modellizzare un problema, che possono sembrare apparentemente lontani mentre invece presentano delle forti connessioni tra loro. Si noti che non c'è nulla di strano nel fatto che un dato problema sia modellizzato in modi anche notevolmente differenti e lontani tra loro, per così dire inconciliabili: non c'è alcuna ragione per cui la via che si può seguire per modellizzare un dato problema debba essere unica. Qui si vuole sottolineare un fatto ben diverso, e cioè che possono esistere dei modelli che *apparentemente* sembrano diversi, mentre *in realtà* sono molto simili se non di fatto coincidenti.

Il secondo obiettivo è di carattere più tecnico, ma non certo irrilevante. Quando si modella un problema mediante un'equazione differenziale, si presuppone a priori che la soluzione sia una funzione *derivabile*. Questa ipotesi in molti casi non presenta problemi. Vi sono tuttavia situazioni in cui questa limitazione a priori del campo di ricerca non ci permette di trovare la soluzione. Un esempio classico in questo ambito è il problema della rifrazione: la curva descritta da un raggio di luce mentre passa (in modo brusco) da un mezzo trasparente ad un altro (classico esempio: luce/acqua) *non* è affatto liscia, bensì presenta, come ben noto, uno spigolo. Oltre a casi come questi, che sono evidentemente particolarmente gravi, visto che ci impediscono di trovare la soluzione di un dato problema, c'è comunque un altro aspetto che può essere fastidioso, in generale, ed è il seguente. Possiamo avere un'equazione differenziale con tanto di esistenza ed unicità della soluzione. Ma chi ci garantisce che l'unicità della soluzione non sia altro che un risultato artificioso, conseguenza del fatto che noi a priori cerchiamo solo soluzioni di un certo tipo? Magari ci sono altre funzioni che non sono derivabili ma che avrebbero tutti i diritti di essere interpretate come soluzioni del problema, e solo la nostra "arbitraria" restrizione a priori alle sole funzioni derivabili fa sì che non le "vediamo".

Il primo esempio coinvolge direttamente entrambi gli obiettivi.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si consideri il *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

E si consideri la seguente *equazione integrale*:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (2)$$

Si può provare, come vedremo tra breve, che si tratta di due problemi *equivalenti*. Vi è però una differenza fondamentale tra questi due problemi: mentre il primo richiede a priori che la soluzione sia derivabile, questa condizione

non è necessaria affinché il secondo problema possa essere sensatamente formulato. Vediamo la formalizzazione di tutto ciò.

Teorema 10.1 *Sia I intervallo di \mathbb{R} , con x_0 interno ad I . E sia $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- I) $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ e φ risolve (su I) il problema di Cauchy (1)*
- II) $\varphi \in \mathcal{C}^0(I)$ e φ risolve (su I) l'equazione integrale (2)*

Dimostrazione. Dimostriamo che $I) \Rightarrow II)$. Ovviamente se $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, φ è anche continua su I . Da (1) abbiamo che $\phi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$. Dato $x \in I$, integriamo entrambi i membri tra x_0 ed x (si noti che ϕ' è continua e quindi l'integrale esiste certamente). Otteniamo $\int_{x_0}^x \phi'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$.

Da cui $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$. Poiché questa relazione vale per ogni $x \in I$; ricordandoci che $\varphi(x_0) = y_0$ in quanto φ risolve (1) abbiamo ottenuto che φ risolve (2).

Dimostriamo che $II) \Rightarrow I)$. Abbiamo che

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \text{ per ogni } x \in I \quad (3)$$

Ma si noti che la funzione $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ è continua su I , in quanto composta di funzioni continue (in particolare, f e φ). Pertanto, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci garantisce che la funzione (“integrale”) $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ è derivabile su I e che la sua derivata prima nel punto x vale $f(x, \varphi(x))$. Ma allora tale “funzione integrale” non solo è derivabile, ma ha derivata prima continua (come detto, la funzione $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ è continua su I).

Pertanto, $x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ è di classe \mathcal{C}^1 su I , in quanto derivabile con derivata prima continua su I . E, data l'uguaglianza (3), abbiamo che φ è di classe \mathcal{C}^1 su I .

Ora ci resta da dimostrare che φ risolve (1).

Ma ovviamente $\phi'(x) = f(x, \varphi(x))$ per ogni $x \in I$, e quindi l'equazione differenziale è soddisfatta. D'altronde, $\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t)) dt = y_0$ e quindi anche la condizione iniziale è rispettata. ■

Si noti che abbiamo potuto dimostrare che $II) \Rightarrow I)$, ed in particolare che $\varphi \in \mathcal{C}^1$, grazie al fatto che f è *continua*. Se f non è continua, non è detto che i due problemi (1) e (2) siano equivalenti. In particolare, non è detto che una soluzione di (2) debba per forza essere derivabile. Questo aspetto, lungi dall'essere un difetto, è invece un *pregio molto importante*. Ci permette di considerare che (2) sia una generalizzazione di (1), applicabile ad ambiti più generali. Per esempio, in dinamica, quando si è in presenza di

“forze impulsive”. Oppure di “variazioni brusche” (cioè, discontinuità) nelle forze o campi di forze che agiscono su una particella (“punto materiale”).

Vediamo un esempio *molto* semplice.

Consideriamo un moto (“unidimensionale”) di un “punto materiale” soggetto ad una forza (“unidimensionale”) dipendente dal tempo. Per determinare il moto di questo corpo possiamo utilizzare la seconda legge della dinamica e le (“condizioni iniziali”).

Supponiamo, in altre parole, di conoscere $F(t)$ ed $x(0)$, $\dot{x}(0)$. Supponiamo $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Abbiamo allora:

$$\begin{cases} F(t) = m\ddot{x}(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Grazie a (4) possiamo determinare la legge del moto. Si noti che l'equazione differenziale è particolarmente semplice ¹! Se vogliamo trovare la velocità del nostro punto materiale, basta integrare:

$$\int_0^t F(s)ds = \int_0^t m\ddot{x}(s)ds.$$

Da cui $\int_0^t F(s)ds = m[v(t) - v_0]$.

Supponiamo sia $m = 1$. Abbiamo $v(t) = v_0 + \int_0^t F(s)ds$.

Allora, per determinare v è sufficiente calcolare questo integrale. Ma soffermiamoci un momento sulle ipotesi. Se F è continua, nessun problema. Ma se F è discontinua, per esempio se è continua a tratti come nella figura di seguito, l'equazione differenziale non ha più senso².

E' del resto abbastanza ragionevole pensare che al tempo $t = 2$ non sia definita l'accelerazione del nostro punto materiale.

Abbiamo invece che la relazione $v(t) = v_0 + \int_0^t F(s)ds$ ha perfettamente senso.

Infatti, questa F , continua a tratti, è integrabile senza alcun problema. E si ha:

$$v(t) = \begin{cases} v_0 + 3t & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ v_0 + 6t & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

¹Stiamo supponendo che la forza sia una funzione data, ovverossia nota, che dipende *solo* dal tempo e non, ad esempio, dalla *posizione* del punto materiale (si pensi ad esempio alla legge di Hooke). E' per questa ragione che non abbiamo una “vera” equazione differenziale, ma solo un problema di integrazione. A parte dettagli trascurabili quali la massa del nostro punto materiale (che stiamo ovviamente assumendo fissata, non dipendente dal tempo), conoscere la forza istante per istante equivale a conoscere l'accelerazione, cioè la derivata seconda della $x(t)$ istante per istante

²Da un punto di vista classico. Ovviamente i matematici non si scoraggiano per così poco...

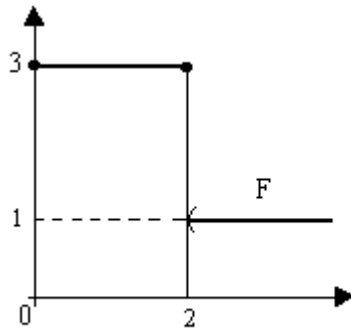


Figura 10.1

Possiamo disegnare il grafico di v , da cui si vede che è una funzione continua, senza però essere derivabile in $t = 2$.

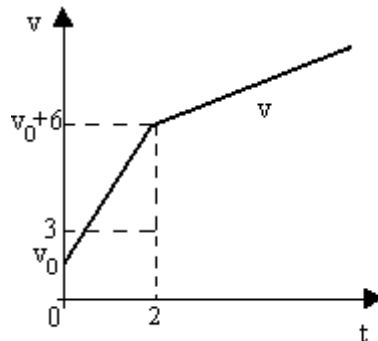


Figura 10.2

Mediante la relazione $v(t) = v_0 + \int_0^t F(s)ds$, siamo quindi in grado di trovare, al variare di t , sia la velocità del corpo, sia ovviamente la posizione (basta integrare un'altra volta). Mentre l'equazione differenziale data è quanto meno di non facile interpretazione, non essendo definita l'accelerazione al tempo $t = 2$.

Il secondo esempio focalizza l'attenzione su formulazioni apparentemente diverse che però sono molto vicine, se non equivalenti.

Parliamo di equazioni funzionali.

Una equazione funzionale "classica" è quella che definisce l'esponenziale.

Vale a dire:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \phi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

E' noto che tutte e sole le funzioni continue³ che risolvono questa equazione sono le funzioni e^{kx} , con $k \in \mathbb{R}$, oltre alla funzione identicamente nulla. E' anche noto che la funzione esponenziale può essere caratterizzata mediante il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Tutto ciò rende plausibile che vi possa essere una relazione tra (5) e (6). E' proprio quello che vedremo. Che una soluzione di (6) risolva (5) è ben noto. Mi limiterò a dimostrare che vale anche il viceversa, nell'*ipotesi* che φ , soluzione di (5), sia *non nulla* e *derivabile* su \mathbb{R} . Come si vede, ritorna il tema della regolarità richiesta a priori per la soluzione di un dato problema. Ma qui la difficoltà è di tipo diverso. Non abbiamo di fronte un problema *per la cui formulazione* dobbiamo imporre a priori che la soluzione sia regolare (ad es., derivabile) perché sennò non sappiamo che senso dare a quello che abbiamo scritto. Qui, la relazione (5) *non richiede affatto* che una sua soluzione sia regolare. Qualunque funzione (da \mathbb{R} in \mathbb{R}) prendiamo, possiamo chiederci se soddisfa oppure no (5)! Il guaio è di tipo opposto: per quanto detto nella nota precedente, sappiamo che ci possono essere soluzioni (molto) irregolari di (5). Quindi, non possiamo sperare di mostrare l'equivalenza delle due formulazioni (5) e (6) in generale, ma solo quando ne ricerchiamo a priori soluzioni derivabili. Cosa che è "obbligatoria" per (6), sennò non capiamo cosa stiamo facendo, mentre non lo è per (5).

Sia allora $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \phi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che si ha $\varphi(x+0) = \varphi(x) \cdot \phi(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Cioè: $\varphi(x) = \varphi(x) \cdot \phi(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ma allora sono possibili due casi:

- $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. vale a dire, φ è identicamente nulla. E questo abbiamo detto che non ci interessava.
- $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(\bar{x}) \neq 0$. Allora in $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) \cdot \phi(0)$ possiamo "semplificare" e ottenere $\phi(0) = 1$.

Abbiamo allora che φ , soluzione non identicamente nulla di (6), è tale che $\varphi(0) = 1$.

Riprendiamo l'equazione(5):

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \phi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

³Si noti che l'equazione 5 ha anche soluzioni che *non* sono continue (queste soluzioni non sono continue in *nessun* punto!). Come si vede, il problema della *regolarità a priori* richiesta alla soluzione non è proprio irrilevante... Per quanto riguarda la descrizione di queste soluzioni "selvagge" dell'equazione 5, la loro descrizione è un po' troppo elaborata per essere riportata qui: occorre vedere \mathbb{R} come uno spazio vettoriale sui razionali, usare una base di Hamel, etc. Chi fosse curioso, può consultare ad esempio *****

Usiamo la lettera h anziché y per rendere più “espressivo” quello che faremo:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) \cdot \phi(h) \quad \forall x, h \in \mathbb{R}$$

Otteniamo, sottraendo membro a membro $\varphi(x)$ e dividendo per h):

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi(x) \cdot \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ma abbiamo visto che $\varphi(0) = 1$:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi(x) \cdot \frac{\varphi(h) - 1}{h} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Facciamo il limite per $h \rightarrow 0$ di entrambi i membri. Questi limiti esistono perché per ipotesi abbiamo assunto che φ fosse derivabile. Inoltre, i limiti sono uguali perché le due funzioni (quella a sinistra e quella a destra) sono uguali in un intorno “bucato” di 0.

Otteniamo allora:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\varphi(x) \cdot \frac{\varphi(h) - 1}{h} \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cioè:

$$\phi'(x) = \varphi(x) \cdot \phi'(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Basta chiamare k la $\phi'(0)$ e abbiamo ottenuto che φ risolve l'equazione differenziale di (6). Che poi sia $\varphi(0) = 1$ già lo avevamo notato.

Esercizio 10.1 Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (5). Provare, utilizzando solo (5), che:

- se $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(\bar{x}) \neq 0$, allora $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

■

Problema 10.1 Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile, soluzione di (5). Quale delle affermazioni seguenti è corretta?

1. $\phi'(x+y) = \phi'(x)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\phi'(x+y) = \phi'(x)\phi'(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $\phi'(x+y) = \phi'(x)\varphi(y) + \varphi(x)\phi'(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Pensateci, prima di vedere la soluzione!

■

Soluzione. 1) è corretta. Consideriamo infatti le funzioni $x \mapsto \alpha(x) = \varphi(x + y)$ e $x \mapsto \beta(x) = \varphi(x) \cdot \phi(y)$ (consideriamo cioè y come “parametro” fissato). In (5) c’è scritto che, per ogni valore y fissato, le due funzioni α e β coincidono su tutto \mathbb{R} .

Essendo derivabili (β è la φ moltiplicata per una costante, mentre α è la φ composta con la funzione $x \mapsto x + y$, che ovviamente è derivabile!), hanno quindi uguali le derivate su tutto \mathbb{R} .

Pertanto $\alpha'(x) = \beta'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. E questa relazione vale per ogni $y \in \mathbb{R}$. Quindi la 1) è provata.

2) non vale. Un controesempio è dato da $\varphi(x) = e^{2x}$

3) idem come sopra

■

11 Chi sono i dati di un'equazione differenziale?

La scrittura $y' = f(x, y)$ indica convenzionalmente una “equazione differenziale” (ordinaria del 1° ordine, in forma normale). Ovviamente una equazione differenziale rappresenta un problema, la cui soluzione é una *funzione*. Si tratta quindi di un caso particolare di equazione funzionale (ma si tratta anche di un caso particolarmente importante). Piú precisamente, cerchiamo come soluzione una funzione *di una sola variabile reale* (essendo una equazione differenziale *ordinaria*. Cioé, cerchiamo un intervallo non degenere I di \mathbb{R} ed una funzione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

$$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

(In realtà questo é corretto se supponiamo che f sia definita su tutto \mathbb{R}^2 . Altrimenti, se l'insieme di definizione di f é A , dovremo aggiungere la condizione che $\forall x \in I (x, \varphi(x)) \in A$. Se non la si vede espressa esplicitamente in molte situazioni é solo perché la si intende sottintesa: anche perché se $(x, \varphi(x)) \notin A$ ovviamente non ha senso $f(x, \varphi(x))$).

Come “tutti” i problemi, un'equazione differenziale esprime una relazione esistente tra *dati* ed *incognite*.

Nel nostro caso, il dato é f . E l'incognita é una funzione (la φ , *col suo insieme di definizione*).

L'equazione “traduce in formule” la relazione esistente tra dati del problema e soluzione. L'equazione ci dice che vogliamo garantire l'uguaglianza tra due funzioni di una variabile: la derivata di φ da una parte e dall'altra la funzione ottenuta componendo opportunamente f e φ .

Si noti che a secondo membro *non* abbiamo $f \circ \varphi$ (f é una funzione di due variabili e quindi non sappiamo che senso dare a questa espressione).

Volendo la possiamo esprimere cosí: $f \circ \varphi$. Dove $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é cosí definita $\varphi(x) = (x, \varphi(x))$.

Vale a dire che le due funzioni φ' e $f \circ \varphi$ (entrambe definite su I) coincidono. Ovviamente, dire che due funzioni coincidono su un insieme I vuol dire che in ogni $x \in I$ assumono lo stesso valore. Cioé:

$$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x).$$

Vale a dire, per come é definita φ :

$$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

Che, naturalmente é l'equazione già scritta ¹

Dell'equazione differenziale possiamo dare una suggestiva interpretazione

¹e ci mancherebbe altro che non lo fosse!

geometrica. A tal fine basta “interpretare” f come campo di direzioni. Ovverossia se $(x, y) \in A$ (insieme di definizione di f), interpretiamo il numero $f(x, y)$ come un coefficiente angolare di una retta. In corrispondenza del punto (x, y) disegniamo un “piccolo” segmento centrato in (x, y) e giacente sulla retta (passante per (x, y)) e avente come coefficiente angolare $f(x, y)$.

Esempio 11.1 Se $(x, y) = (1, 3)$ ed $f(x, y) = f(1, 3) = 2$, disegneremo il segmento calcolato nella figura.

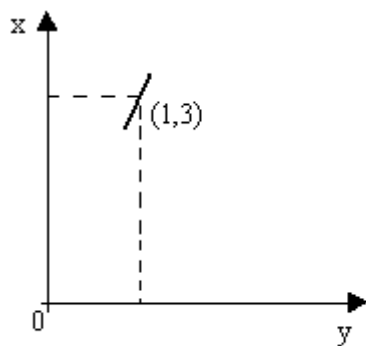


Figura 11.1

Questo suggerito, é un modo di rappresentare graficamente un “campo di direzioni”.

Si noti che se si rappresentano i valori di questo campo di direzioni in un numero sufficiente di punti (possibilmente scelti in modo “ordinato”), si puó avere una intuizione grafica di come possano essere fatte le soluzioni dell’equazione differenziale data.

Esempio 11.2 Consideriamo il caso particolare $y' = y$.

Abbiamo $f(x, y) = y$. Se uno fa attenzione, puó vedere “evocati ” i grafici delle esponenziali che sono soluzione di questa equazione differenziale.

■

L’idea che conduce a questa interpretazione geometrica é ovvia. Se φ é soluzione dell’equazione differenziale, abbiamo che per ogni $x \in I$ é $\varphi'(x) =$

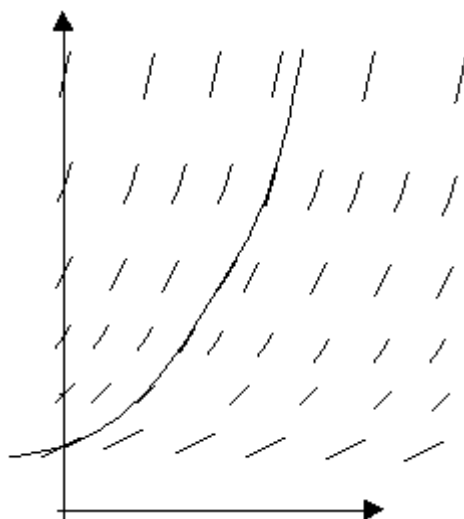


Figura 11.2

$f(x, \varphi(x))$. Ma $\varphi'(x)$ non é altro che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di φ nel punto $(x, \varphi(x))$! E se φ risolve l'equazione differenziale, tale coefficiente angolare deve essere uguale a $f(x, \varphi(x))$.

La rappresentazione di un'equazione differenziale mediante un campo di direzioni puó servire anche per convincere che, quando abbiamo un'equazione differenziale,² il *dato* del problema é la funzione f , che é una funzione di due variabili,

Tuttavia, per “convincere ” ancor piú di questo fatto, vediamo un piccolo problema di dinamica delle popolazioni, che modellizziamo come equazione differenziale.

Supponiamo di essere interessati a come varia nel tempo la quantità di zooplancton presente in un certo volume d'acqua. Per togliere di mezzo complicazioni di carattere idrodinamico, possiamo immaginare che lo zooplancton stia in un contenitore in laboratorio.

Un ipotesi ragionevole é assumere che l'incremento nello zooplancton dipenda dalla quantità di zooplancton presente nel recipiente (per effetto della riproduzione) e della quantità di nutrienti che si trova nel recipiente.

Cioé se indichiamo con $Z(t)$ la quantità di zooplancton presente al tempo t , e con $N(t)$ la quantità di nutriente presente al tempo t , possiamo pensare che la quantità di zooplancton presente dopo un intervallo temporale

²S'intende: ordinaria, del 1° ordine, in forma normale.

“piccolo” Δt , sia pari a $Z(t)$ piú una quantità che potrebbe essere *proporzionale*³ a $Z(t)$ (oltre che alla lunghezza dell’intervallo $Z(t)$) per effetto della riproduzione, piú un’altra quantità che potremmo assumere essere *proporzionale* (vedi la nota 2). ad $N(t)$ (ed a Δt).

Abbiamo allora

$$Z(t + \Delta t) = Z(t) + \Delta t \cdot (\alpha Z(t) + \beta N(t))$$

Con passaggi standard, descritti e discussi altrove, otteniamo:

$$Z'(t) = \alpha Z(t) + \beta N(t) \tag{1}$$

Bene, chiediamoci ora: qual é il *dato* del problema? Cioé: cosa dobbiamo *conoscere* per “predire” l’andamento di Z nel tempo?

Naturalmente ci aspettiamo che ci serva sapere quali sono le “condizioni iniziali”. Ovverossia, saper quanto vale $Z(0)$ (se “facciamo partire il cronometro” all’inizio dell’esperimento). Ma l’altro dato fondamentale é la *dinamica* del problema. Che é riassunta dalla relazione (1). Ma, in (1), *quale é il dato?* Che cosa dobbiamo sapere? Cosa é che determina la dinamica del problema ?

É la funzione $f(t, Z) = \alpha Z + \beta N(t)$. Che é ovviamente una funzione *di due variabili*

Uno puó provare la fastidiosa sensazione che il secondo membro della (1) sia stato trattato in modo “asimmetrico”. Avevamo $Z(t)$ ed $N(t)$, mentre scrivendo $f(t, z)$ abbiamo fatto “sparire” la “ $Z(t)$ ”, sostituendola con Z . Mentre abbiamo lasciato $N(t)$!

Deve essere chiaro che “abbiamo fatto bene”. E, per convincersene, é opportuno riflettere sulla differenza che cé tra gli “addendi” $\alpha Z(t)$ e $\beta N(t)$ in (1). Mentre é evidente che siamo noi che fissiamo il dato $N(t)$, cioé che ad ogni istante possiamo decidere quanto nutriente immettere nel recipiente, la situazione é ben diversa per quanto riguarda $Z(t)$! Certo, siamo noi che determiniamo $Z(t)$, ma in modo indiretto. Ció su cui abbiamo un controllo diretto é la funzione $t \mapsto N(t)$, ed i parametri α e β ⁴ Non abbiamo invece questo controllo diretto sulla funzione $t \mapsto Z(t)$. Sarebbe d’altronde piuttosto strano che questa funzione, che é l’incognita del problema, fosse anche allo stesso tempo un dato del problema.

Tuttavia, per cercare di non nascondere obiezioni possibili, sará opportuno notare che volendo ci é possibile “*influenzare direttamente*” la funzione

³Supponiamo che la densità di zooplancton e di nutriente sia “bassa”. Cioé che non vi siano effetti di “saturazione”.

⁴Che certamente possiamo fare in modo che assumano un valore diverso, ponendo per esempio il recipiente in un ambiente a temperatura (costante, per semplicitá) pari a 90°

$t \mapsto Z(t)$. Come? Per esempio *aggiungendo noi* zooplancton nel recipiente. Ed al ritmo che vogliamo noi!

Mi sembra però evidente che in questo modo stiamo descrivendo un altro problema, non quello originario. E, perché ciò sia più evidente, vediamo di capire a quale equazione differenziale si arrivi.

Supponiamo che si aggiunga zooplancton secondo la legge seguente $t \mapsto \gamma t$.

Rifacciamo lo stesso tipo di conti che ci hanno portato a (1).

Si ha

$$Z(t + \Delta t) = Z(t) + \alpha \Delta t \cdot Z(t) + \gamma \cdot \Delta t + \beta \Delta t \cdot N(t)$$

Da cui

$$\frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \alpha Z(t) + \gamma + \beta N(t)$$

E quindi:

$$Z'(t) = \alpha Z(t) + \gamma + \beta N(t)$$

Vale a dire, abbiamo l'equazione $Z' = g(t, Z)$. Dove $g(t, Z) = \alpha Z + \gamma + \beta N(t)$.

Problema 11.1 Siano date due funzioni, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si considerino le equazioni differenziali.

1. $y' = u(x) \cdot v(y)$
2. $y' = u(y) \cdot v(y)$

Si cerchino eventuali soluzioni *costanti* di queste due equazioni.

Se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione e $c \in \mathbb{R}$, la funzione $x \mapsto \varphi(x + c)$ è ancora soluzione? Discuterlo per entrambe le equazioni differenziali. ■

12 Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri l'equazione differenziale $y'(x) = a(x)b(y)$, con:

$a : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, I intervallo

$b : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua con derivata prima continua, J intervallo

L'equazione differenziale data, in queste ipotesi, ha naturalmente soluzioni, definite su opportuni intervalli, perché il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

ha esistenza e unicità della soluzione (almeno in piccolo) comunque sia dato $(x_0, y_0) \in I \times \overset{\circ}{J}^1$

Ci proponiamo di determinare le soluzioni dell'equazione differenziale mediante integrazioni.

Innanzitutto osserviamo che se $\bar{y} \in J$ è t.c. $b(\bar{y}) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione differenziale proposta su tutto I (verifica immediata).

Quindi, ad ogni "zero" della funzione b è associata una soluzione, costante, dell'equazione. D'altro canto, il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy ci permette di dire che: se y è una soluzione dell'equazione, definita su un certo intervallo $S \subseteq I$, tale che in almeno un punto $x \in S$ non renda nullo $b(y(x))$, allora $b(y(x))$ sarà sempre diverso da zero su S . Infatti, se $y(x)$ fosse tale da annullare b in qualche punto \bar{x} , vorrebbe dire che $y(\bar{x}) = \bar{y}$ è tale che $b(\bar{y}) = 0$. Ma allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} \end{cases}$$

avrebbe due soluzioni distinte: la funzione $y(x)$ in questione e la funzione costantemente uguale ad \bar{y} .

Pertanto, se $y(x)$ è una soluzione su $S \subseteq I$, o è $b(y(x)) = 0 \quad \forall x \in S$, oppure $b(y(x)) \neq 0$ su tutto S : in quest'ultimo caso si avrà sempre $b(y(x)) > 0$ su tutto S oppure $b(y(x)) < 0$ su tutto S (altrimenti si avrebbe una contraddizione con il teorema degli zeri).

Risolviamo ora effettivamente l'equazione differenziale. Per quanto detto sopra, ci limiteremo a cercare le soluzioni $y(x)$ tali che $b(y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in S$. Più precisamente, abbiamo che $\{y(x) : x \in S\}$ sarà un intervallo K contenuto in J nel quale b mantiene un segno costante,

Da $y'(x) = a(x)b(y(x)) \quad \forall x \in S$, segue:

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \quad \forall x \in S, \text{ da cui}$$

¹Qui $\overset{\circ}{J}$ sta ad indicare l'insieme dei punti interni di J .

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx$$

Effettuiamo nell'integrale indefinito a primo membro la sostituzione $t = y(x)$.

$$\left(\int \frac{dt}{b(t)} \right)_{t=y(x)} = \int a(x) dx$$

Se $A(x)$ e $B(t)$ sono due primitive, rispettivamente di a su S e di $1/b$ su K , si ha:

$$(B(t))_{t=y(x)} = A(x) + c \quad (c \text{ costante reale}), \text{ ovvero:}$$

$$B(y(x)) = A(x) + c \quad (2)$$

Ma $B'(t) = 1/b(t)$ conserva su K segno costante, pertanto B è strettamente crescente su K e quindi invertibile. Se B^{-1} indica l'inversa di B , si ha:

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c) \quad (3)$$

Con il procedimento sopra indicato si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione a variabili separabili, anche se occorre tenere presente che bisognerà usare tante funzioni inverse di B quanti sono gli intervalli su cui b ha segno costante.

Esempio 12.1 $y' = \sin y$

E' $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = k\pi$. Quindi le funzioni costanti $y(x) = k\pi$ sono soluzioni dell'equazione $\forall k \in \mathbf{Z}$. Per il resto, abbiamo:

$$\frac{y'(x)}{\sin(y(x))} = 1 \quad \text{da cui} \quad \int \frac{y'(x)}{\sin(y(x))} dx = \int dx$$

Pertanto:

$$\left(\int \frac{dt}{\sin(t)} \right)_{t=y(x)} = x + c$$

Se $y(x) = t \in]2h_0\pi, (2h_0 + 1)\pi[$, abbiamo:

$$\left[\log \left(\tan \frac{t}{2} \right) \right]_{t=y(x)} = x + c$$

$$\left[\log \left(\tan \frac{y(x)}{2} \right) \right] = x + c$$

$$\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = e^{x+c}$$

$$y(x) = 2\left(\arctan(e^{x+c}) + h_0\pi\right)$$

(è opportuno tenere presente che l'inversa di $v = \tan u$ in $]h_0\pi, h_0\pi + \pi/2[$ è $u = \arctan v + h_0\pi$).

Analogamente, se $y(x) = t \in](2h_0 - 1)\pi, 2h_0\pi[$, si ha:

$$\left[\log\left(-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=y(x)} = x + c$$

$$\left[\log\left(-\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right)\right] = x + c$$

$$-\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = e^{x+c}$$

$$y(x) = 2\left(\arctan(-e^{x+c}) + h_0\pi\right)$$

Graficamente, le soluzioni sono:

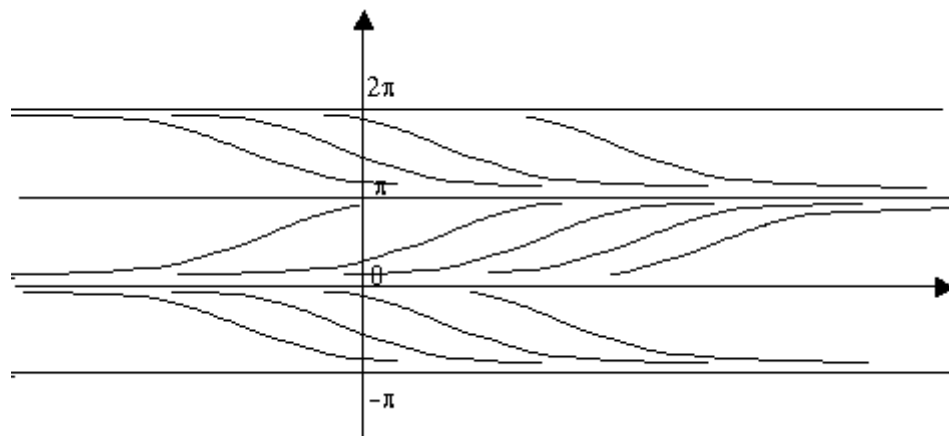


Figura 12.1

Osserviamo che essendo l'equazione differenziale *autonoma* (cioé il secondo membro $f(x, y)$ non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x), il grafico risulta invariante rispetto a traslazioni nel senso delle x .

Nel caso in cui si abbia da risolvere un problema di Cauchy come (1) associato ad una equazione a variabili separabili, si può procedere in due modi. Un modo consiste nell'utilizzare la formula (2) che dá le soluzioni dell'equazione, da cui si ricava $C = B(y_0 - Ax_0)$; é importante ricordare che poi per passare alla forma esplicita (3) occorre usare l'inversa di B sull'intervallo K individuato dal fatto che contiene y_0 .

Un altro modo consiste nel risolvere l'equazione usando l'integrazione definita da:

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \quad \forall x \in S, \text{ segue}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{b(y(s))} ds = \int_{x_0}^x a(s) ds$$

(la lettera di integrazione é stata come al solito cambiata per evitare di fare confusione con la variabile x).

Anche qui, usiamo la sostituzione $t = y(s)$:

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dt}{b(t)} = \int_{x_0}^x a(s) ds \quad \text{da cui} \quad B(y(x)) - B(y(x_0)) = A(x) - A(x_0)$$

Ovvero (ricordiamo che $y(x_0) = y_0$): $B(y(x)) = A(x) + B(y(x_0)) - A(x_0)$.

Se poi B^{-1} é l'inversa di B sull'intervallo che contiene y_0 . $y(x) = B^{-1}(A(x) + B(y_0) - A(x_0))$

Esempio 12.2 Utilizziamo ancora l'equazione già risolta prima:

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = \frac{11}{2}\pi \end{cases}$$

Seguendo la prima strada: $y(0) = y_0 = \frac{11}{2}\pi \in](2h_0 - 1)\pi, 2h_0\pi[$ per $h_0 = 3$.

Quindi, $\log(-\tan(\frac{11}{4}\pi)) = 0 + c$.

Ovvero: $c = \log(-\tan(\frac{-\pi}{4})) = \log(\tan \frac{\pi}{4}) = \log 1 = 0$.

Pertanto, $y(x) = 2(\arctan(-e^x) + 3\pi)$.

Seguendo la seconda strada:

$$\int_0^x \frac{y'(s)}{\sin(y(s))} ds = \int_0^x 1 ds$$

Ovvero:

$$\int_{\frac{11}{2}\pi}^y \frac{dt}{\sin t} = x$$

Poiché $\sin \frac{11}{2}\pi < 0$, abbiamo:

$$\log(-\tan \frac{t}{2}) \Big|_{\frac{11}{2}\pi}^y = x$$

Ossia:

$$\log(-\tan \frac{y}{2}) = x + \log\left(-\tan \frac{11}{4}\pi\right)$$

Cioé:

$$\log(-\tan \frac{y}{2}) = x$$

Ovvero:

$$\tan \frac{y}{2} = -e^x$$

Da cui

$$\frac{y}{2} = \arctan(-e^x) + 3\pi$$

Ovvero

$$y(x) = 2(\arctan(-e^x) + 3\pi)$$

VERIFICA:

$$y(0) = 2(\arctan(-1) + 3\pi) = 2(-\frac{\pi}{4} + 3\pi) = \frac{11}{2}\pi$$

$$y'(x) = 2 \frac{-e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$\sin y(x) = \sin [2(\arctan(-e^x) + 3\pi)]$$

Le ultime 2 equazioni DOVREBBERO ESSERE UGUALI!!!

Lo sono in effetti, basta usare la relazione

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \alpha/2}{1 + \tan^2 \alpha/2}$$

$$\sin(y(x)) = \frac{2 \tan[\arctan(-e^x) + 3\pi]}{1 + \tan^2[\arctan(-e^x) + 3\pi]} = \frac{2 \tan[\arctan(-e^x)]}{1 + \tan^2 \arctan(-e^x)} = \frac{-2e^x}{1 + e^{2x}}$$

■

13 Dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema di Cauchy. Lemma di Gronwall

Ci occuperemo del problema della dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema di Cauchy.

Alla dimostrazione del risultato premettiamo alcune considerazioni generali, che verranno illustrate facendo riferimento ad un esempio specifico.

Sia dato un pendolo di lunghezza L che si muove in un campo gravitazionale costante g . Ci occuperemo del seguente problema: quale è la velocità angolare quando il pendolo passa per la prima volta per la posizione verticale, se è lasciato partire, in quiete, da un certo angolo θ_0 ?

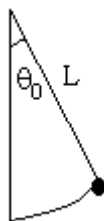


Figura 13.1

Effettuando le usuali ipotesi e semplificazioni, otteniamo che il moto del pendolo è descritto dal seguente sistema (problema di Cauchy):

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

E' chiaro che è importante sapere se questo problema ha esistenza ed unicità della soluzione.

Esistenza: se non c'è soluzione, certo questo modello matematico del pendolo non ci permette di rispondere alla domanda. In generale la non esistenza è legata alla presenza di “troppe condizioni rispetto ai gradi di libertà”.

Unicità: anche la mancanza di unicità della soluzione non ci permette di rispondere al problema formulato. Usualmente la non unicità della soluzione di un problema indica che è sottodeterminato (“più incognite che equazioni”): ovvero, non si è tenuto conto di alcune condizioni che intervengono in modo essenziale.

Nel nostro problema specifico, possiamo applicare il teorema di esistenza ed unicità, trasformando l'equazione in un sistema equivalente: si verifica facilmente come la soluzione del problema di Cauchy esista, sia unica ed anzi la

soluzione massimale sia definita su tutto \mathbb{R} .

In altre parole, è definito il moto per $t \in [0, +\infty[$ ¹ Abbiamo quindi la possibilità di dare una risposta univoca al problema prospettato.

Non possiamo considerarci soddisfatti, però. E non solo per il fatto che non abbiamo detto nulla su come si possa effettivamente trovare la soluzione del problema, cosa di cui ci occuperemo dopo. A questo punto, infatti, sappiamo (almeno teoricamente) determinare $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0}$ se sono dati *esattamente* $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}\big|_0 = 0$.

Ma nessuno è in grado di far partire un pendolo esattamente dall'angolo θ_0 . E neanche esattamente in quiete.

Sia quindi dato $\theta(0) = \tilde{\theta}_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = \tilde{\theta}_1$ Possiamo ancora applicare il teorema di esistenza ed unicità ed avere quindi $\tilde{\theta}(t)$, definita di nuovo in tutto \mathbb{R} , soluzione del nuovo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \\ \theta(0) = \tilde{\theta}_0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = \tilde{\theta}_1 \end{cases} \quad (1)$$

Si pone quindi la questione: dato $\tilde{\theta}_0 \approx \theta_0$ e $\tilde{\theta}_1 \approx 0$, per la soluzione $\tilde{\theta}(t)$ si ha $\frac{d\tilde{\theta}}{dt}\big|_{\tilde{\theta}=0} \approx \frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0}$?

Possiamo rappresentare l'equazione differenziale come una macchinetta che ai dati iniziali associa la soluzione. E poi della soluzione ci interessa il valore $\frac{d\theta}{dt}$ per $\theta = 0$. Si ha quindi:

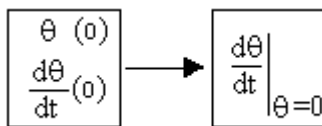


Figura 13.2

Ovverossia, una applicazione che alla coppia $(\theta(0), \frac{d\theta}{dt}(0)) \in \mathbb{R}^2$ associa $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0} \in \mathbb{R}$.

Possiamo tradurre la questione in termini matematici precisi chiedendoci se questa applicazione è *continua*.

Un altro problema, sempre legato al moto del pendolo, avrebbe potuto essere: dato $\theta(0)$ e $\frac{d\theta}{dt}(0)$, trovare la legge oraria $\theta(t)$ per $t \in [0, 1]$ (anziché

¹Il moto è anche definito per $t \in]-\infty, 0]$. Ciò significa che se il pendolo si è trovato all'istante $t = 0$ nella posizione θ_0 e con $\frac{d\theta}{dt} = 0$ nel corso di oscillazioni che avvenivano da un tempo precedente all'istante $t = 0$, siamo in grado di ricostruire la storia passata del pendolo.

interessarci semplicemente a $\frac{d\theta}{dt}|_{\theta=0}$.
 Questa volta abbiamo:

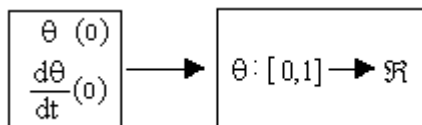


Figura 13.3

Cioè una applicazione $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{C}^1([0, 1])$, che a $(\theta(0), \frac{d\theta}{dt}(0)) \in \mathbb{R}^2$ associa $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, elemento di $\mathcal{C}^1([0, 1])$. Ci si può chiedere se S è continua. Ma quale *metrica* mettiamo su $\mathcal{C}^1([0, 1])$? La metrica della convergenza uniforme, o quella che considera lo scarto quadratico medio ($d_2(\theta, \tilde{\theta}) = \left\{ \int_0^1 [\theta(t) - \tilde{\theta}(t)]^2 dt \right\}^{1/2}$). o quale altra ancora? Dipende da quali proprietà della soluzione ci interessano, ed anche dal tipo di approssimazione con la quale siamo interessati a conoscere la soluzione.

Abbiamo sviscerato il problema? Abbiamo parlato di esistenza ed unicità della soluzione e di dipendenza continua dai dati. Basta così? No. E' importante anche la "dipendenza continua dall'equazione". Cosa significa? Un modo per affrontare il problema può essere il seguente (sempre riferito al pendolo). Abbiamo un'equazione del tipo $\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(t, \theta, \frac{d\theta}{dt})$.

Se cambiamo f con \tilde{f} , funzione regolare, con $f \simeq \tilde{f}$, abbiamo una nuova equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tilde{f}(t, \theta, \frac{d\theta}{dt})$.

Consideriamo:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}) \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tilde{f}(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}) \\ \theta(0) = \tilde{\theta}_0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = \tilde{\theta} \end{cases}$$

Siano $\theta(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ rispettivamente le soluzioni dei due problemi di Cauchy. Sarà ancora $\frac{d\theta}{dt}|_{\theta=0} \simeq \frac{d\tilde{\theta}}{dt}|_{\tilde{\theta}=0}$?

Ma cosa vuol dire cambiare f con \tilde{f} ? Facciamo un esempio concreto: nello scrivere l'equazione del pendolo, abbiamo trascurato l'attrito. Se ne tenessimo conto (almeno in modo semplificato, supponendolo proporzionale alla

velocità), l'equazione differenziale diventerebbe:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{k}{n} \frac{d\theta}{dt} = \tilde{f}(t, \theta, \frac{d\theta}{dt})$$

Se $\frac{k}{n} \simeq 0$, é $\tilde{f} \simeq f$. In altre parole, se anziché non esserci assolutamente attrito, supponiamo che esso sia molto piccolo, si avrà ancora $\frac{d\theta}{dt}|_{\theta=0} \simeq \frac{d\tilde{\theta}}{dt}|_{\tilde{\theta}=0}$? L'interesse a sostituire f con \tilde{f} può essere però di tutt'altro tipo. Potremmo essere tentati di sostituire l'equazione data con questa: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$. Questa volta le ragioni per fare questo passo non hanno nulla di fisico, ma sono matematiche: si sostituisce all'equazione data una più semplice, più facile da risolvere.

Concludendo, appare ragionevole richiedere per un problema tradotto matematicamente da un problema di Cauchy l'esistenza e l'unicità della soluzione, nonché la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali e dal secondo membro dell'equazione differenziale ².

Dimostriamo pertanto un teorema di dipendenza continua dai dati e dal secondo membro dell'equazione. Premettiamo a tale risultato il notevole

Lemma 13.1 (di Gronwall). *Sia $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, continua, sia $K \geq 0$, sia inoltre $z : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e ≥ 0 .*

Se é $\varphi(x) \leq K + \int_a^x \varphi(t)z(t)dt \forall x \in [a, b[$, allora é:

$$\varphi(x) \leq Ke^{\int_a^x z(t)dt}$$

Dimostrazione. Sia $\Psi(x) = K + \int_a^x \varphi(t)z(t)dt$. Per ipotesi si ha $\varphi(x) \leq \Psi(x)$. Inoltre $\Psi(a) = K$. É $\Psi'(x) = \varphi(x)z(x) \leq \Psi(x)z(x)$.

Cioé $\Psi'(x) \leq \Psi(x)z(x)$. Moltiplichiamo la disuguaglianza per $e^{-\int_a^x z(t)dt}$: $\Psi'(x)e^{-\int_a^x z(t)dt} \leq \Psi(x)z(x)e^{-\int_a^x z(t)dt}$. Allora é $\frac{d}{dx} [\Psi(x)e^{-\int_a^x z(t)dt}] \leq 0$. Se

integriamo ambo i membri da a a x troviamo: $\Psi(x)e^{-\int_a^x z(t)dt} - \Psi(a)$. Da cui $\Psi(x) \leq \Psi(a)e^{\int_a^x z(t)dt}$. Essendo (vedi sopra) $\varphi(x) \leq \Psi(x)$ e $\Psi(a) = K$, si ottiene: $\varphi(x) \leq Ke^{\int_a^x z(t)dt}$.

C.V.D. ■

Si consideri $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Sia $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ con f ed f_y continue. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

esiste ed é unica ed é definita (almeno) su $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, con $\delta = \min(a, \frac{b}{M})$, essendo M il massimo di $|f|$ su R .

²Sia chiaro che la discussione precedente é estremamente sintetica e ben lungi dall'essere completa. Per qualche estensione vedasi: F. Brauer e J.A. Nobel: "Ordinary differential Equation" Editore W.A. Benjamin

Si consideri ora: $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$, con \tilde{f} ed \tilde{f}_y continue.

Proviamo innanzitutto che se: $|x_0 - \tilde{x}_0| \leq \sigma, |y_0 - \tilde{y}_0| \leq \sigma, |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| \leq \sigma$ allora la soluzione \tilde{y} del problema

$$\begin{cases} y' = \tilde{f}(x, y) \\ y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \quad (2)$$

é definita (almeno) su $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$, pur di prendere σ abbastanza piccolo. Infatti, per il teorema di esistenza e unicitá applicato al problema (2), si ha che \tilde{y} é definita su $]x_0 - \tilde{\delta}, \tilde{x}_0 + \tilde{\delta}[$ con $\tilde{\delta} = \min \left\{ a - |x_0 - \tilde{x}_0|, \frac{b - |y_0 - \tilde{y}_0|}{M} \right\} \geq \min \left\{ a - \sigma, \frac{b - \sigma}{M + \sigma} \right\}$. É evidente che per $\sigma \rightarrow 0$ é $\tilde{\delta} \rightarrow \delta$; ancora piú ovvio é che $\tilde{x}_0 \rightarrow x_0$ se $\sigma \rightarrow 0$. Esisterá quindi, σ_1 , tale che per $\sigma < \sigma_1$, si ha che $]x_0 - \tilde{\delta}, \tilde{x}_0 + \tilde{\delta}[\subset]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$.

Effettuata questa premessa, possiamo enunciare (e dimostrare) il seguente risultato.

Teorema 13.1 *Sia dato $R = [x_0 - a, x_0 + a] * [y_0 - b, y_0 + b]$. Siano $f, \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f, \tilde{f}, f_y, \tilde{f}_y$ continue. Sia M il massimo di $|f|$ su R e A il massimo di $|f_y|$ su R . Sia $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Allora, $\forall \epsilon > 0 \exists \sigma > 0$ tale che se $|x_0 - \tilde{x}_0| \leq \sigma, |y_0 - \tilde{y}_0| \leq \sigma, |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| \leq \sigma \forall (x, y) \in SR$, allora le soluzioni y e \tilde{y} dei rispettivi problemi di Cauchy sono definite entrambe (almeno) su $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$ e si ha $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \epsilon \forall x \in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$.*

Dimostrazione. In seguito alla discussione precedente, abbiamo che tanto y quanto \tilde{y} sono definite su $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$ pur di prendere $\sigma < \sigma_1$. Si ha, $\forall x \in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$y(\tilde{x}) = \tilde{y}_0 + \int_{\tilde{x}_0}^x \tilde{f}(t, y(t)) dt$$

Sia $x \in [x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}[$. Si ha (facendo la differenza membro a membro e prendendo i valori assoluti):

$$\begin{aligned} |y(x) - \tilde{y}(x)| &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt - \int_{\tilde{x}_0}^x \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) dt \right| \\ &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt - \int_{x_0}^x \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) dt \right| \end{aligned}$$

$$\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \left| \int_{\tilde{x}_0}^{x_0} |\tilde{f}(t, \tilde{y}(t))| dt \right| + \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))| dt$$

(Essendo $|\tilde{f}| \leq M + \sigma$)

$$\begin{aligned} & \sigma + \sigma(M + \sigma) + \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))| dt \\ & \leq \sigma(M + 1 + \sigma) + \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| dt + \int_{x_0}^x |f(t, \tilde{y}(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))| dt \\ & \leq \sigma(M + 1 + \sigma) + \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))| dt + \sigma^2 \\ & \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma) + \int_{x_0}^x A|y(t) - \tilde{y}(t)| dt \end{aligned}$$

Sia $\varphi(x) = |y(x) - \tilde{y}(x)|$. Abbiamo provato che $\varphi(x) \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma) + \int_{x_0}^x A\varphi(t) dt$. Per il lemma di Gronwall: $\varphi(x) \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma)e^{A(x-x_0)} \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma)e^{A\sigma}$. Quindi $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma)e^{A\sigma}$. È evidente che il secondo membro può essere reso $< \epsilon$ pur di prendere σ sufficientemente piccolo. Abbiamo quindi, provato che $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \epsilon \forall x \in [x_0, x_0 + \frac{\sigma}{2}]$. ■

Con la stessa procedura si dimostra il risultato per $x \in]x_0 - \frac{\sigma}{2}, x_0]$: naturalmente per tale dimostrazione si userà una versione del lemma di Gronwall “a sinistra”, che si enuncia e dimostra anch’essa analogamente alla versione “a destra” di tale lemma.

14 Esistenza ed unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy. Soluzioni locali, massimali, “in grande”

Cominciamo con un paio di esempi.

Esempio 14.1 Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

nonostante che $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ sia definita e continua su tutto \mathbb{R}^2 , ha più di una soluzione. È immediato infatti verificare che la funzione x^3 e la funzione 0 identicamente nulla, cioè) sono soluzioni. In realtà ce ne sono infinite. Fissati arbitrariamente $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \leq x_2$, la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} (X - X_1)^3 & x \leq x_1 \\ 0 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ (X - X_2)^3 & x_2 \leq x \end{cases}$$

é soluzione del problema di Cauchy. ■

Si noti che la funzione $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$, pur essendo continua, non é però derivabile sull'asse delle x . Possiamo allora sperare che, imponendo una maggiore regolarità alla f , sia possibile garantire l'esistenza ed unicità della soluzione per un problema di Cauchy. Vedremo che, in effetti, così é.

Esempio 14.2 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y' &= 1 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

É evidente che $\varphi(x) = \tan x$, nell'intervallo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é soluzione del problema. In questo caso é anche unica, come vedremo a suo tempo. Si noti però che avviene un fatto curioso. Mentre la “dinamica del sistema” ha senso per ogni x (la funzione $f(x, y) = 1 + y^2$ é definita e regolarissima su tutto \mathbb{R}^2), la soluzione però non é definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma solo su $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Si verifica così in questo caso il fenomeno cosiddetto della “esplosione in tempo finito” della soluzione. ■

Osservazione 14.1 Si noti che la funzione $\varphi = \tan x$ definita sul suo dominio “naturale” e cioè su $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, é soluzione dell'equazione

differenziale $y' = 1 + y^2$. Ma non viene considerata soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' &= 1 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$. Per soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

, é una funzione φ , definita su un *intervallo* I (non degenerare, cioè contenente almeno due e quindi infiniti punti) che contiene x_0 e tale che : $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varphi(x_0) = y_0$ ■

Notiamo che un'equazione differenziale esprime un legame tra passato e futuro,¹ che si attua attraverso una catena di passaggi temporali “infinitamente piccoli”. In un problema di Cauchy vogliamo istruire questo “legame temporale” tra il dato iniziale e istanti successivi (o anche precedenti). Ma tutto ciò ha senso solo se si é su un intervallo.

Il secondo esempio oltre a mostrare il fenomeno (che può essere sorprendente a prima vista) della “esplosione in tempo finito”, ci ha fatto anche riflettere sul ruolo non banale dell' insieme di definizione della soluzione.

In un certo senso, doveva essere ovvio a priori che l'insieme di definizione fosse importante. Basta ricordarsi che una soluzione di una equazione differenziale é una *funzione* e che quindi come tale avrà il suo dominio e codominio. Ma mentre il codominio é sempre \mathbb{R} , il ruolo del dominio (o insieme di definizione) della funzione é rilevante.

Si noti che, se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é soluzione di una equazione differenziale e se $J \subseteq I$, allora anche $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $\varphi|_J$ é anch'essa soluzione. Questo fatto ci richiederá di fare attenzione nel parlare di *unicità* della soluzione di un problema di Cauchy.

Gli approcci ragionevoli che abbiamo a disposizione per risolvere correttamente questa difficoltà sono due:

- specificare che *su un dato intervallo* é definita una ed una sola funzione che risolve il problema di Cauchy.
- individuare, se possibile, “il piú grande intervallo” nel quale sia definita una soluzione del problema di Cauchy (parleremo allora di soluzioni “massimali”).

¹questo aspetto é particolarmente evidente se si fissa la propria attenzione sulla fase di modellizzazione di un fenomeno mediante una equazione differenziale

Cominciamo con l'enunciare un risultato di esistenza ed unicit , che si pone nella prima delle due ottiche proposte. Nei teoremi seguenti ci riferiremo sempre al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Teorema 14.1 *Sia $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, dove $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ ($a, b > 0$).*

*Supponiamo che f sia continua su R e lipschitziana rispetto ad y su R (cio  $\exists L \geq 0$ t.c. $|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (x_1, y_1), (x_1, y_2) \in R$)
Detto $M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$, sia $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}^2$. Allora , sull'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$   definita una ed una sola soluzione di (17)*

Il teorema(14.1)   interessante in quanto , tra quelli dimostrabili per via "elementare", ci offre un teorema di esistenza ed unicit  in ipotesi molto poco restrittive.   tuttavia conveniente avere un risultato di pi  agevole applicazione. Il teorema seguente ha queste caratteristiche. Ed inoltre ci offre anche una risposta al problema dell'unicit  seguendo il secondo dei due approcci indicati in precedenza.

Premettiamo un p  di terminologia. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$. Diremo che (\bar{x}, \bar{y})   interno ad A se $\exists \rho > 0$ t.c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} < \rho\} \subseteq A$.

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, diremo che A   un aperto se ogni suo punto   un punto interno. Cio , se per ogni $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ esiste $\rho > 0$ t.c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} < \rho\} \subseteq A$.

Ricordiamo infine che, dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto, diciamo che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   "di classe C^∞ su A " (indicato come $f \in C^\infty(\mathcal{A})$) se f ha entrambe le derivate parziali in ogni punto di A e se le derivate parziali sono funzioni continue su tutto A .

Possiamo finalmente enunciare il seguente

Teorema 14.2 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, e sia $f \in C^\infty(\mathcal{A})$.³ Sia inoltre $(x_0, y_0) \in A$. Allora :*

- $\exists \delta > 0$ t.c. su $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$   definita una ed una sola soluzione di (17).⁴

- Il problema (17) ha una ed una sola soluzione massimale

²Se $M = 0$ (caso molto speciale!) definiamo $\delta = a$

³In realt  basterebbe assumere solo che $f, f_y \in C'(\mathcal{A})$

⁴oppure $\exists \delta > 0$ t.c. su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$   definita una ed una sola soluzione di (17)

Ovviamente questo teorema sarebbe interessante se sapessimo cosa vuol dire “soluzione massimale”

Definizione 14.1 Siano $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ (con I, J intervalli non degeneri) 2 soluzioni di (17). Diciamo che ψ é un prolungamento proprio di φ se

- $I \subseteq J$, con $I \neq J$
- $\psi|_I = \varphi$

Diciamo che una soluzione di (17) é una soluzione massimale se non c'è alcun' altra soluzione che ne sia un prolungamento proprio.

Notiamo che, quando si parla di “soluzione di (17)” senza specificare su quale intervallo sia definita, si intende riferirsi alla soluzione massimale.

Esempio 14.3 Il problema $\begin{cases} y'(t) = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ già considerato, non ha mai un'unica soluzione, per quanto piccolo scegliamo l'intervallo su cui concentriamo la nostra attenzione. Vale a dire, comunque noi scegliamo α, β (con $\alpha \leq 0, \beta \geq 0$ e non entrambi nulli), avremo *almeno due* soluzioni su $[\alpha, \beta]$. E cioè $x^3 = 0$. ■

Esempio 14.4 Consideriamo $\begin{cases} y'(t) = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Questo problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione sull'intervallo $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ (ed é x^3). Ma ha piú di una soluzione massimale. Infatti, x^3 é una soluzione massimale. Ma lo é anche la funzione $\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ x^3 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$. ■

L'ultimo risultato di carattere generale che menzioniamo é un teorema il quale ci garantisce che non si verifica il fenomeno della “esplosione in tempo finito”.

Teorema 14.3 Sia $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dove I é un intervallo aperto di \mathbb{R} . Sia $f \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R})$ ⁵. E sia $x_0 \in I$. La soluzione⁶ massimale di (17) é definita su tutto I se é soddisfatta una delle seguenti condizioni:

- f é limitata su $I \times \mathbb{R}$

⁵Anche in questo caso basterebbe $f, f_y \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R})$

⁶Si noti che il teorema precedente ci garantisce che il problema (17) ha una ed una sola soluzione massimale

- f_y é limitata su $I \times \mathbb{R}$

Osservazione 14.2 Attenzione, é sufficiente una sola delle due ipotesi sopra menzionate. ■

Osservazione 14.3 Quest'ultimo teorema é particolarmente interessante perché offre il fondamento per garantire che le soluzioni di equazioni differenziale *lineari* sono *definite* sullo stesso intervallo sul quale i coefficienti sono definiti e continui. Cioé, se $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ con $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, con I intervallo di \mathbb{R} , del teorema precedente possiamo dedurre⁷ che la soluzione massimale di (17) é definita *su tutto* I . ■

Osservazione 14.4 Ricordo che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove A é un insieme qualsiasi, si dice *limitata* se esistono $h, H \in \mathbb{R}$ tali che $h \leq f(a) \leq H \quad \forall a \in A$. ■

Esempio 14.5 Per quali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema di Cauchy $\begin{cases} y' &= \sin(xy) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$

ha una e una sola soluzione locale?

E per quali (x_0, y_0) ha una soluzione massimale? E dove sono definite queste soluzioni massimali?

■

Soluzione. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f(x, y) = \sin(xy)$, soddisfa le ipotesi del teorema (14.3) (con I evidentemente uguale a \mathbb{R}). Infatti, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, in quanto composto di: $g(x, y) = xy$ che é definita su tutto \mathbb{R}^2 e di classe \mathcal{C}^1 su tutto \mathbb{R}^2 .

$h(t) = \sin t$ che é definito su tutto \mathbb{R} e di classe \mathcal{C}^1 su tutto \mathbb{R} .

Inoltre, essendo $|\sin(x, y)| \leq 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la f é anche limitata su \mathbb{R}^2 .

Quindi, qualunque sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il problema dato ha una ed una sola soluzione massimale che é definita su tutto \mathbb{R} . (A maggior ragione ha quindi una ed una sola soluzione locale). ■

⁷Anche se la deduzione non é del tutto immediata...

Esempio 14.6 Per quali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema di Cauchy $\begin{cases} y' &= \frac{x}{y} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$ ha una ed una sola soluzione massimale? Dove sono definite? ■

Soluzione. Possiamo applicare il teorema (14.2) considerando $f(x, y) = \frac{x}{y}$ definita su $A = \mathbb{R} * (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. La funzione f é di classe \mathcal{C}^1 su A . E quindi, purché sia $y_0 \neq 0$ (se $y_0 = 0$, $(x_0, y_0) \notin A$), possiamo garantire che il problema dato ha localmente una e una sola soluzione, e che ha una ed una sola soluzione massimale.

Non possiamo applicare il teorema (14.3). Volendo, possiamo stimare segni “ δ ” servendoci del teorema (14.1).

Sia allora, dato (x_0, y_0) . Supponiamo sia $x_0 > 0$ ed $y_0 > 0$. (Gli altri casi si trattano analogamente. Richiedono solo un po’ di attenzione per i “segni”). Consideriamo $R = [x_0 - a, x_0 + a] * [y_0 - b, y_0 + b]$ (con $b < y_0$). Naturalmente, f soddisfa le ipotesi del teorema (14.1). Ci serve stimare

$\max \{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$. Ma $\left| \frac{x}{y} \right| \leq \frac{x_0 + a}{y_0 - b}$. Scegliendo $b = \frac{y_0}{2}$, abbiamo

$$\left| \frac{x}{y} \right| \leq \frac{2(x_0 + a)}{y_0}.$$

Quindi, $M \leq \frac{2(x_0 + a)}{y_0}$.

E allora, $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \geq \min \left\{ a, \frac{y_0}{2} \frac{y_0}{2(x_0 + a)} \right\} = \min \left\{ a, \frac{y_0^2}{4(x_0 + a)} \right\}$.

Se scegliamo $a = x_0$, otteniamo $\delta \geq \min \left\{ x_0, \frac{y_0^2}{8x_0} \right\}$.

Con ciò abbiamo una stima inferiore per δ (cioé la soluzione massimale del problema dato é definita *almeno* su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$).

Si noti ad esempio che, se partiamo sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, cioè se $y_0 = x_0$, abbiamo che $\min \left\{ x_0, \frac{x_0^2}{8x_0} \right\} = \min \left\{ x_0, \frac{x_0}{8} \right\} = \frac{x_0}{8}$.

Quindi, la soluzione é definita *almeno* su $[x_0 - \frac{x_0}{8}, x_0 + \frac{x_0}{8}]$, cioè $[\frac{7}{8}x_0, \frac{9}{8}x_0]$ ■

Osservazione 14.5 Come potevamo essere cosí certi che la funzione di quest’ultimo esempio soddisfacesse le ipotesi del teorema 1? In particolare, perché é “lipschitsiana rispetto alla y ” su R ? Ce lo garantiscono le seguenti considerazioni, conseguenza del teorema del valor medio.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, con $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

Siano $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in A$. Allora, $\exists \eta \in]y_1, y_2[$ tale che $f((x_1, y_2)) - f(x_1, y_1) = (y_2 - y_1)f_y(x_1, \eta)$.

(É il teorema del valor medio, o “di Lagrange”, per le funzioni di piú variabili).

Se considero $R = [x_0 - a, x_0 + a] * [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$, ho che

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)| = |y_2 - y_1| \cdot |f_y(x_1, \eta)| \leq |y_2 - y_1| \cdot L$$

dove $L = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$. Si noti che $f \in \varphi'(A)$, quindi $|f_y|$ é *continua* su R e quindi ha massimo su R (che é un sottinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^2) grazie al teorema di Weierstrass. ■

15 Metodo di Eulero o “delle poligonali”

Sia data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Vogliamo trovare una soluzione *approssimata* di questo problema. L'idea é molto semplice. Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo contenente x_0 ; *supponiamo per comodit  che sia $I = \mathbb{R}$* é la soluzione del problema di Cauchy, abbiamo che

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varphi(x_0) = y_0$$

L'idea chiave é sostituire a $\varphi'(x)$ il *rapporto incrementale*. Fissiamo un $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ (non c  una “regola” per scegliere h , per quello che faremo é opportuno scegliere h “piccolo”, ma non mi preoccuper  di rendere significativa questa espressione).

Approssimiamo allora $\varphi'(x)$ con $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$.

Cominciamo a fare queste approssimazioni a partire da x_0 . Perch ? Per una ragione ovvia. E cio  per il fatto che conosciamo il valore di $\varphi(x_0)$.

Che é y_0 .

Allora, abbiamo

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = f(x_0, \varphi(x_0)) \quad (1)$$

che é una relazione che sostituiamo a quella (corretta) data dall'equazione differenziale : $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$. Da (1) otteniamo $\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + hf(x_0, \varphi(x_0))$

Ovverosia $\varphi(x_0 + h) = y_0 + hf(x_0, y_0)$

Si noti che x_0, y_0, h sono noti (e cos  f). Quindi possiamo calcolarci $\varphi(x_0 + h)$.

Una volta calcolato $\varphi(x_0 + h)$, possiamo “ripartire” da qui ed ottenere $\frac{\varphi(x_0 + 2h) - \varphi(x_0 + h)}{h} = f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$. Vale a dire $\varphi(x_0 + 2h) = \varphi(x_0 + h) + hf(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$.

E abbiamo a disposizione tutti i dati necessari per calcolare $\varphi(x_0 + 2h)$. E cos  via ...

Vedi i listati allegati di due programmi in *basic*

EULERO2.BAS

```
‘‘Soluzione approssimata mediante il metodo di Eulero detto anche
‘‘delle poligonali) del problema di Cauchy:  $y' = f(x, y)$  con condizione
‘‘iniziale  $y(x_0) = y_0$ 
‘‘ Immissione dei dati
INPUT ‘‘ condizione iniziale: dare  $x_0''; x_0$ 
INPUT ‘‘ condizione iniziale: dare  $y_0''; y_0$ 
INPUT ‘‘ dare  $x_1$ , cioè fin dove si vuol calcolare la soluzione’’;
 $x_1$ 
INPUT ‘‘ numero intervallini: digitare un numero intero’’;  $n$ 

‘‘ Inizializzazione
 $x = x_0$ 
 $y = y_0$ 
 $h = (x_1 - x_0)/n$ 

‘‘Ciclo iterativo
FOR i=0 TO  $n$ 
‘‘ Facciamo stampare il numero dell’iterazione ed i valori corrispondenti
‘‘della  $x$ , della soluzione approssimata ( $y$ ), nonché della soluzione
‘‘esatta (naturalmente la soluzione adatta, se disponibile, andrà
‘‘sostituita a quella messa qui per il caso  $y' = y$ 
‘‘ N.B. : se vogliamo seguire passo passo, basta togliere il commento
‘‘dalla riga seguente:
‘INPUT pausa $
PRINT  $i; x; exp(x)$ 

‘‘L’esempio é fatto nel caso di  $y = y'$ . Nel caso generale di
‘‘ $y' = f(x, y)$  il passo iterativo della  $y$  va calcolato come:
‘‘ $y = y + h * f(x, y)$ 
‘‘ $y = y + h * y$ 
‘‘Incrementiamo il valore della  $x$  di un valore pari al passo
‘‘prescelto  $x = x + h$ 

NEXT  $i$ 
```

EULGRAF2.BAS

(Rappresentazione grafica della soluzione approssimata e di quella esatta,
se disponibile)

```
‘‘Soluzione approssimata mediante il metodo di Eulero
‘‘ (detto anche delle poligonali) del problema di Cauchy:
‘‘  $y' = f(x, y)$  con condizione iniziale  $y(x_0) = y_0$ 

‘‘Si caricano nel vettore  $y$  i valori calcolati passo passo
‘‘ della soluzione, mentre nel vettore  $z$  si caricano i valori della
soluzione esatta (se disponibile), per fare confronti
DIM  $y(1000)$ ,  $z(1000)$ 

‘‘Immissione dei dati
INPUT ‘‘ condizione iniziale: dare  $x_0''; x_0$ 
INPUT ‘‘ condizione iniziale: dare  $y_0''; y_0$ 
INPUT ‘‘ dare  $x_1$ , cioé fin dove si vuol calcolare la soluzione’’;
 $x_1$ 
INPUT ‘‘ numero intervallini: digitare un numero intero minore
o uguale a 1000’’;  $n$ 

‘‘ Inizializzazione
 $x = x_0$ 
 $y = y_0$ 
 $h = (x_1 - x_0)/n$ 

‘‘Ciclo iterativo
FOR  $i=0$  TO  $n$ 

‘‘L'esempio é fatto nel caso di  $y = y'$ . Nel caso generale di
‘‘ $y' = f(x, y)$  il passo iterativo della  $y$  va calcolato come:
‘‘  $y = y + h * f(x, y)$ 
 $y(i) = y + h * y_i$ 

‘‘Carichiamo nel vettore  $y$  i valori della soluzione approssimata
‘‘ via via trovati
 $y_i = y(i)$ 

‘‘Incrementiamo il valore della  $x$  di un valore pari al passo prescelto
 $x = x + h$ 
‘‘Carichiamo nel vettore  $z$  i valori della soluzione esatta:
‘‘qui é per il problema ci Cauchy  $y = y'$  ed  $y(0) = 1$ 
 $z(i) = \exp(x)$ 
```

```

NEXT i

'' *** parte grafica***
SCREEN 9: CLS 0

'' Le righe sono basata sul caso del pb. di Cauchy
''  $y = y'$  ed  $y(0) = 1$ .
'' In generale, sará il caso di sostituire le istruzioni WINDOW e
LINE
'' con quelle che sono qui ''commentate'',
'' scegliendo opportunamente i parametri (interi)  $a, b, c$ .
'' Ad esmpio si possono usare i valori seguenti:
'a = -5 : b = -5 c = 50
'WINDOW (a, b) - (n, c):
'LINE (0, c) - (0, 0): LINE (0, 0) - (n + 1, 0):
WINDOW (-1, -1) - (n, INT(exp(x1)))
LINE (0, INT(EXP(x1))) - (0, 0): LINE (0, 0) - (n + 1, 0)
PSET (x0, y0)
FOR i = 1 TO n: LINE -(i, y(i)): NEXT i
'' Se si vuole vedere disegnare prima il grafico approssimato e poi
'' quello della soluzione giusta, togliere il commento alla
'' riga seguente. In esecuzione, dopo che la curva approssimata
'' é stata tracciata, premere ''enter ''
'INPUT pausa $
PSET (x0, y0)
FOR i = 1 TO n: LINE - (i, z(i)): NEXT i

```

16 Integrali primi ed orbite

Consideriamo un *sistema* di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale. Per semplicitá considereremo un sistema di 2 equazioni e 2 incognite, anziché il caso generale $n \times n$.

Una ulteriore *semplificazione* consiste nel fatto che considereremo sistemi *autonomi*. Cioé, invece del caso piú generale: $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}$ Considereremo

$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ Vale a dire, da un punto di vista modellistico, ci occuperemo di sistemi dinamici (per esempio) per i quali la dinamica non varia nel tempo.

Tanto per fare un esempio stupido: rientra in questo il modello della caduta di un grave (con o senza attrito) in un campo gravitazionale *che non dipende dal tempo*. Se invece cambia con l'andar del tempo (es. dentro una navicella spaziale sottoposta ad accelerazioni variabili), siamo fuori del caso di modellizzazione con un sistema autonomo. Se g cambia col variare della pressione (es. vogliamo calcolare la traiettoria di un missile intercontinentale), il sistema é ancora autonomo.

Premettiamo un teorema di esistenza ed unicitá della soluzione di un problema di Cauchy, che estende ai sistemi quello che giá avevamo considerato per le equazioni.

Teorema 16.1 Sia dato $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}$, dove $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, essendo A un aperto di \mathbb{R}^3 ed $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ assegnata la c.i. $(t_0, x_0, y_0) \in A$, esiste una ed una sola soluzione massimale del problema di Cauchy.

Osservazione 16.1 Soluzione di $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}$ é una coppia di funzioni $\xi, \eta : I \rightarrow \mathbb{R}$, t.c.

$$\begin{cases} \xi(t) = f(t, \xi(t), \eta(t)) \\ \eta(t) = g(t, \xi(t), \eta(t)) \end{cases} \text{ per ogni } t \in I.$$

In particolare poi, se $\xi(t_0) = x_0$ ed $\eta(t_0) = y_0$, avremo che la coppia di funzioni (ξ, η) é soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Osservazione 16.2 A noi, come detto interessará un sistema *autonomo*:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \text{ In questo caso avremo } f, g : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e sar\'a}$$

sufficiente assumere $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ ed (A aperto) oltre che $(x_0, y_0) \in A$ per garantire che il pb di Cauchy ha una ed una sola soluzione massimale. \blacksquare

Osservazione 16.3 I sistemi di equazioni differenziali sono importanti anche perché ad essi si possono ridurre le equazioni differenziali di ordine superiore al primo. Vediamo un esempio: se abbiamo $\ddot{z} = h(t, z, \dot{z})$, basta considerare $x = z, y = \dot{z}$ ed otteniamo il sistema: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = h(t, x, y) \end{cases}$ che è un sistema *del primo ordine* di 2 equazioni e 2 incognite. Dove $f(t, x, y) = y$ e $g(t, x, y) = h(t, x, y)$. Va da sé che, per garantire esistenza ed unicità della soluzione massimale per un problema di Cauchy quale

$$\begin{cases} \ddot{z} &= h(t, z, \dot{z}) \\ z(t_0) &= z_0 \\ \dot{z}(t_0) &= z_1 \end{cases}$$

sarà essenziale la regolarità della funzione h . ■

Esercizio 16.1 Scrivere la versione del teorema 16.1 per un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine. ■

Esercizio 16.2 Scrivere la più generale equazione differenziale di ordine n e trasformarla in un sistema del primo ordine. ■

Esercizio 16.3 Si consideri $\begin{cases} \ddot{v} = v + \ddot{w} \\ \ddot{w} = vw \end{cases}$ Trasformarlo in un sistema *del primo ordine* ■

D'ora in poi, come detto, considereremo solo sistemi 2×2 autonomi

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Con $f, g \in C^1(A)$, A aperto di \mathbb{R}^2

Definizione 16.1 Sia (ξ, η) una soluzione massimale di (2). Sia I l'intervallo¹ sul quale è definita. Cioè sia $\xi, \eta : I \rightarrow \mathbb{R}$. La sua traiettoria (“nello spazio

¹N.B. parlando di soluzione di un (sistema) di equazioni differenziali e non di un problema di Cauchy, non saremmo “obbligati” a considerarla su un intervallo. Qui imponiamo per comodità questa restrizione

delle fasi”), e cioè

$$\{(x, y) \in A : \exists t \in I \text{ t.c. } (x, y) = (\xi(t), \eta(t))\}$$

viene detta orbita

Lo “spazio delle fasi” non é altro che un \mathbb{R}^2 .

Il nome viene spesso usato e deriva dalla riduzione di un’equazione di secondo ordine ad un sistema.

Grazie all’ipotesi di regolaritá che abbiamo fatto su f e g , possiamo garantire che, date 2 orbite, generate da due soluzioni massimali, si possono presentare solo due casi:

- le due orbite non si intersecano mai
- le due orbite coincidono

Infatti, se le due orbite si intersecano vale a dire se hanno un punto in comune (\bar{x}, \bar{y}) vuole dire che

$$\exists t_1 \in I_1, t_2 \in I_2 \text{ t.c. } (\bar{x}, \bar{y}) = (\xi_1(t_1), \eta_1(t_1)) = (\xi_2(t_2), \eta_2(t_2))$$

Dove $\xi_1, \eta_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é la soluzione massimale che genera la prima orbita O_1 e $\xi_2, \eta_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é quella che genera l’altra orbita O_2 . É immediato verificare che $\tilde{\xi}_1(t) = \xi_1(t - t_1)$ e $\tilde{\xi}_2(t) = \xi_2(t - t_2)$

(Analogamente ² per $\eta \dots$) ci danno due soluzioni massimali dello stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \\ x(0) &= \bar{x} \\ y(0) &= \bar{y} \end{cases}$$

E allora devono coincidere. Morale: ξ_1 e ξ_2 non sono altro che l’una la “traslata” dell’altra (idem per η , vedi anche in questo caso la nota 2). E quindi le orbite O_1, O_2 coincidono per intero.

Quindi le orbite ci danno una *partizione* di A (che le orbite “riempiano tutto” A é conseguenza del teorma di *esistenza* ed [unicitá]).

Occupiamoci ora di un altro problema, che ha qualche somiglianza col precedente, ma che riguarda *una* sola orbita. Sia allora O un’orbita. E sia (ξ, η) una soluzione massimale che le genera. Anche qui possiamo distinguere tra due casi:

²Si noti: ξ_1 e η_1 le “trasliamo” della *stessa* quantitá t_1 . E cosí ξ_2 e η_2 sono entrambe “traslate” dello stesso t_2

- per ogni $(x, y) \in O$ esiste ³ ed é *unico* $t \in I$ t.c. $(\xi(t), \eta(t)) = (x, y)$
- esiste $(x, y) \in O$ t.c. vi sono almeno *due* $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$ t.c. $(\xi(t_1), \eta(t_1)) = (\xi(t_2), \eta(t_2)) = (x, y)$

Questo secondo caso può verificarsi in due occasioni. Una é che le funzioni ξ ed η siano costanti. Altrimenti, si può dimostrare che ξ ed η sono periodiche con lo stesso periodo $T > 0$).

É abbastanza evidente che conoscere le orbite di un sistema dinamico é interessante. E vedremo in seguito altre ragioni di interesse. Chiediamoci allora se c'è un modo per trovarle, senza dover passare attraverso la soluzione del sistema di equazioni differenziali dato.

Prima di vedere come sia possibile farlo, sarà opportuno riflettere sul *perché* ci possiamo aspettare che sia possibile in qualche modo trovare le orbite senza avere la descrizione completa del moto. C'è almeno un'ovvia considerazione: conoscere un'orbita vuol dire (almeno "a prima vista") conoscere qualcosa di meno della legge del moto. E, quindi, non é così strano che ci si possa arrivare con una "scorciatoia".

Per affrontare il problema, osserviamo che un'orbita dovrebbe essere ragionevolmente una linea nel piano xy . Supponiamo che essa possa essere descritta (implicitamente, come si usa dire) come $v(x, y) = c$. Dove $c \in \mathbb{R}$, mentre $v \in \mathcal{C}^1(A)$. Cioé come "una curva di livello". Per definizione di orbita, sarà $v(\xi(t), \eta(t)) = c \forall t \in I$ se (ξ, η) é una delle soluzioni dell'equazione differenziale che genera l'orbita in questione.

$$\begin{aligned} \text{Allora} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \dot{\xi}(t) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \dot{\eta}(t) &= 0 \quad \forall t \in I \quad \text{Cioé:} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot f(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot g(\xi(t), \eta(t)) &= 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo la speranza che

$$\frac{\partial v}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} g(x, y) = 0 \tag{3}$$

possa essere un'equazione che ci permetta di trovare la v e quindi l'orbita. Si noti che (3) é una equazione alle derivate parziali (lineare del primo ordine, nell'incognita v). Possiamo però ridurci, almeno *localmente*, ad una equazione differenziale ordinaria. Nel modo che ora vediamo.

Supponiamo che sia $\nabla v \neq 0$ su tutto A . Allora, per il Teorema di Dini sulle

³ovviamente!!!

funzioni implicite, la relazione $v(x, y) = c$ può essere localmente esplicitata. Vale a dire, ⁴dato un punto (x, y) t.c. $v(x, y) = c$ esiste $\omega : H \rightarrow \mathbb{R}$, dove H è un opportuno intervallo di (x, y) , t.c.

$$v(x, \omega(x)) = c \quad \forall x \in H$$

Non solo, ma $\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$

Allora, la (3) può essere riscritta così:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Vale a dire, almeno localmente la (3) si trasforma nell'equazione differenziale

$$y' = h(x, y) \quad (\text{dove} \quad h(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)})$$

Si badi bene che non abbiamo *dimostrato* che le orbite si trovano risolvendo l'equazione differenziale $y' = h(x, y)$.

In effetti, questa ci permette solo di trovare in ogni caso al più "pezzi" di orbite. Ma se siamo fortunati...

Occupiamoci ora dell'altro tema: "integrali primi".

Dato il sistema (2) diciamo *integrale primo* per (2) una funzione non costante $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($u \in \mathcal{C}^1(A)$), t.c. $u(\xi(t), \eta(t))$ sia *costante* per $t \in I$ (essendo $\xi, \eta : I \rightarrow \mathbb{R}$, soluzione di (2)).

È evidente il legame esistente con le orbite, per quanto abbiamo appena visto. In effetti, se u è un integrale primo per (2), allora le sue curve di livello descrivono *orbite* di (2).

C'è un aspetto importante a proposito degli integrali primi, sul quale non possiamo soffermarci, ma che vale la pena di citare. (Per una trattazione adeguata, vedasi il libro di Pontryagin indicato in bibliografia. Chiediamoci *quanti* integrali primi possa avere un sistema. Ovviamente la domanda va fatta "cum grano salis".

È ovvio che se u è un integrale primo lo sono anche per esempio $u+1$, $2u-4$, $\exp(u)$. Ma è altrettanto ovvio che non ci danno alcuna informazione aggiuntiva ⁵ oltre a quelle che ci fornisce già u .

In effetti si può dimostrare che (sotto condizioni ragionevoli) un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in n incognite ha al massimo $n-1$ integrali primi "funzionalmente indipendenti". ⁶Quindi, in particolare, per

⁴supponendo sia esplicitabile rispetto alla y . Se lo è rispetto ad x , basta rovesciare il ruolo delle variabili

⁵se così non fosse, dovremmo ammutolire per lo stupore

⁶vedasi Pontryagin per chi volesse sapere cosa significa esattamente

il sistema (2) é inutile cercarne piú di uno.

Si noti che ciò si applica anche alle equazioni di ordine superiore al primo (come abbiamo visto, si possono trasformare in sistemi del primo ordine). In particolare, un'equazione differenziale del secondo ordine avrebbe un integrale primo.

Visto che l'equazione fondamentale della dinamica ($F = ma$) é appunto un'equazione del secondo ordine e visto che un integrale primo u descrive (per definizione!) qualcosa *che si conserva* lungo tutto il movimento, sarebbe il caso di chiedersi se questo integrale primo non abbia a che fare con qualche pomposo "principio di conservazione". Cosí é infatti. Lo vedremo con due esempi in casi particolari: caduta di un grave e movimento di una molla.

Esempio 16.

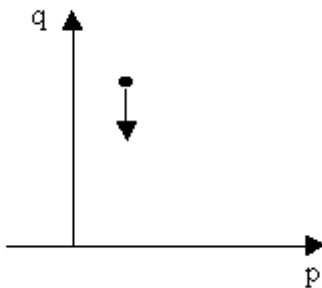


Figura 16.1

$\ddot{q} = -g$. Trasformo in un sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g \end{cases}$ Diciamo che il piano xy é il piano delle fasi. Sarà per caso vero che $u(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + gx$ é un integrale primo? Si noti che u é l'energia totale (cinetica + potenziale che, per l'appunto é noto che si "conserva").

Soluzione del sistema é

$$\xi(t) = s_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \quad \eta(t) = v_0 - gt$$

$$u(\xi(t), \eta(t)) = \frac{1}{2}[v_0 - gt]^2 + s_0g + v_0gt - \frac{1}{2}g^2t^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + s_0g$$

Sí é vero. La funzione u é costante su $(\xi(t), \eta(t))$. Quindi é un integrale primo. E allora le orbite (o traiettorie del moto) sono date da $u(x, y) = c$ Cioé $\frac{1}{2}y^2 + gx = c$.

Ovverossia $x = -\frac{1}{2g} + \frac{c}{g}$

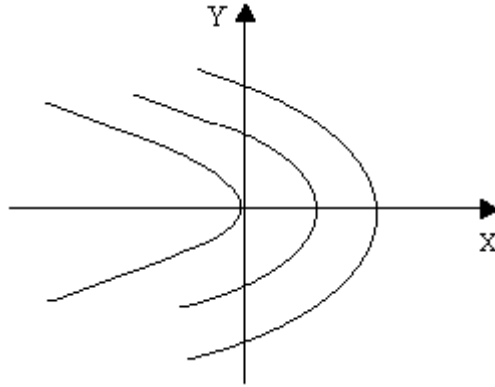


Figura 16.2

■

Naturalmente, conoscendo un integrale primo (ovverosia, le orbite) possiamo dire varie cose sul moto. Deducendole direttamente da loro, senza passare attraverso la soluzione esplicita del sistema (in questo caso la conosciamo, ma questo caso semplice ci é utile per capire “come si fa”). Ad esempio posso osservare che (fissato c) l’equazione $\bar{x} = -\frac{1}{2g}y^2 + \frac{c}{g}$ ha due soluzioni: $y = \pm\sqrt{2(c - g\bar{x})}$. Vale a dire in valore assoluto la velocità con la quale il grave passa per una data posizione \bar{x} é la stessa. Sia nel caso in cui “va su”, sia se “va giú”.

Oppure, fissato (x_0, y_0) (che posso pensare come condizioni iniziali del moto) posso garantire che oltre un certa posizione non potrà andare. Anzi, posso dire quale sarà la posizione (x_M) massima che raggiungerá. Basta trovare l’ascissa del vertice della parabola che passa per (x_0, y_0) fra tutte quelle delle famiglia $x = -\frac{1}{2g}y^2 + \frac{c}{g}$.

Possiamo, per concludere, vedere se riusciamo a trovare le orbite ⁷ usando il metodo descritto in precedenza.

L’equazione differenziale da risolvere é $y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$.

Cioé $y' = \frac{-g}{y}$. Che é a variabili separabili e che si risolve facilmente, dandoci

⁷Sappiamo già quali sono. Ma solo perché graziosamente qualcuno ha “suggerito” che potesse essere un integrale primo. Non sempre avremo il suggeritore a nostra disposizione.

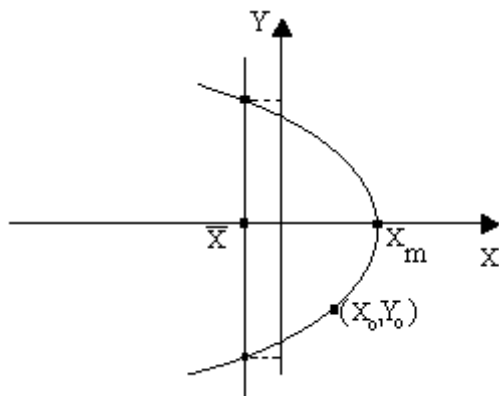


Figura 16.3

$$\frac{1}{2}y^2 = -gx + c.$$

Si noti, per concludere, che avendo un sistema 2×2 questo possiede essenzialmente un solo integrale primo.

Esercizio 16.4 Si consideri il moto di una molla che “ubbidisce” alla Legge di Hooke. Cioé $\ddot{p} = -kp$. Scrivere il sistema di primo ordine associato a questa equazione e trovarne le orbite ed un integrale primo. Che figura sono geometricamente le orbite?

Corrispondono all’intuizione che abbiamo sul moto di una molla? ■

Esempio 16.2 Consideriamo il seguente sistema 3×3 :

$$\begin{cases} \dot{x} &= k_1 y z - k_2 x \\ \dot{y} &= k_2 x - k_1 y z \\ \dot{z} &= k_2 x - k_1 y z \end{cases}$$

Sia $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ una soluzione.

Sottraendo membro a membro la seconda e la terza equazione otteniamo che $\dot{\eta}(t) - \dot{\zeta}(t) = 0$. Da cui $\eta(t) - \zeta(t) = \text{cost}$. Quindi $u(x, y, z) = y - z$ é un integrale primo. Questo fatto ci permette di ridurre il sistema ad uno “ 2×2 ”.

Infatti, $y - z$ sará costante. Quindi possiamo sostituire a $z = y - c$ (dove c é una costante). Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x} &= k_1 y(y - d) - k_2 x \\ \dot{y} &= k_2 x - k_1 y(y - d) \end{cases}$$

Stavolta, sommando membro a membro otteniamo $\dot{\xi}(t) + \dot{\eta}(t) = 0$. Quindi $v(x, y, z) = x + y$ é un altro integrale primo. Altri non é il caso di cercarne.

■

Problema 16.1 Interpretare il sistema precedente come modello per una reazione chimica reversibile. In particolare, interpretare x, y, z , le costanti k_1, k_2 nonché indicare quale (o quali) principio di conservazione sia legato agli integrali primi che abbiamo trovato.

Esempio 16.3 Consideriamo un semplice modello di dinamica di due popolazioni interagenti

$$\begin{cases} \dot{x} &= (a - by)x \\ \dot{y} &= (c - dx)y \end{cases}$$

Per trovare le orbite e gli integrali primi dobbiamo risolvere $y' = \frac{(c-dx)y}{(a-by)x}$. Questa é un'equazione a variabili separabili che ci dá la soluzione della equazione differenziale in forma implicita:

$$\begin{aligned} a \log y - by &= c \log x - dx + k && \text{Ma allora} \\ u(x, y) &= d(x - c \log x) + (a \log y - by) && \text{é un integrale primo} \end{aligned}$$

Che interpretazione ne possiamo dare ? D'Ancona (capitolo 17) parla di “quantitá di vita della popolazione”, di “energia demografica attuale” ed “energia demografica potenziale”. Ma non si applicano a questa u

■

17 Problemi ai limiti per equazioni differenziali lineari. Autovalori

Consideriamo l'equazione differenziale che descrive il cosiddetto "oscillatore armonico", con *condizioni ai limiti*

$$\begin{cases} \ddot{x} - \gamma x &= 0 \\ x(0) = x(T) &= 0 \end{cases} \text{ Dove } \gamma, T \in \mathbb{R} \text{ sono parametri dati.}$$

Ovviamente c'è la soluzione banale ($x \equiv 0$). Vediamo se ce ne sono altre.

Risolviamo l'equazione differenziale $\ddot{x} - \gamma x = 0$

Risolviamo l'equazione caratteristica: $\lambda^2 - \gamma = 0$

$$\begin{aligned} \gamma > 0 &\rightsquigarrow \lambda = \pm\sqrt{\gamma} \\ \gamma = 0 &\rightsquigarrow \lambda = 0 \quad (\text{con molteplicità due}) \\ \gamma < 0 &\rightsquigarrow \lambda = \pm i\sqrt{-\gamma} \end{aligned}$$

Da qui otteniamo che l'integrale generale è

$$\begin{aligned} \gamma > 0 &\rightsquigarrow x(t) = c_1 e^{\sqrt{\gamma}t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}t} \\ \gamma = 0 &\rightsquigarrow x(t) = c_1 + c_2 t \\ \gamma < 0 &\rightsquigarrow x(t) = c_1 \cos(\sqrt{-\gamma}t) + c_2 \sin(\sqrt{-\gamma}t) \end{aligned}$$

Vediamo se possiamo soddisfare le condizioni ai limiti.

$$\begin{cases} x(0) &= c_1 + c_2 \\ x(T) &= c_1 e^{\sqrt{\gamma}T} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\gamma}T} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}T} &= 0 \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\gamma}T} & e^{-\sqrt{\gamma}T} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\gamma}T} - e^{\sqrt{\gamma}T}$. Ed è diverso da zero, tranne nel caso banale in cui sia $T = 0$.

Quindi, se $\gamma > 0$, c'è solo la soluzione identicamente nulla, per il problema ai limiti dato. Analoghe considerazioni valgono per $\gamma = 0$. Vediamo il caso per $\gamma < 0$.

Imponiamo le condizioni ai limiti:

$$\begin{cases} x(0) &= c_1 \\ x(T) &= c_1 \cos(\sqrt{-\gamma}T) + c_2 \sin(\sqrt{-\gamma}T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 &= 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{-\gamma}T) &= 0 \end{cases} \rightsquigarrow c_1 = c_2 = 0 \quad \text{se} \quad \sin(\sqrt{-\gamma}T) \neq 0$$

Ma se $\sin(\sqrt{-\gamma}T) = 0$, cioè se $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\sqrt{-\gamma}T = k\pi$, allora il problema ai limiti ha *soluzione non nulla!*

Se abbiamo un oscillatore armonico “concreto”, é ragionevole pensare che γ sia dato, in quanto dipende dalla struttura dell’oscillatore (k ed m nel caso di una molla; l, m, g nel caso del pendolo “linearizzato”). Possiamo allora dire che, dato γ , per $T = \frac{k\pi}{\sqrt{-\gamma}}$ il sistema ha soluzioni non nulle. Che sono $x(t) = c_2 \sin(\sqrt{-\gamma}T)$.

Il significato di quello che abbiamo trovato é questo: il nostro “oscillatore” (le cui caratteristiche sono date da γ) ha un suo periodo proprio di oscillazione che é $T = \frac{\pi}{\sqrt{-\gamma}}$. E se parte dalla posizione 0 al tempo 0, non possiamo fare in modo che si ritrovi nella posizione 0 in istanti che non siano quelli determinati dalla sua frequenza propria di oscillazione. Ciò che possiamo ottenere é di variare l’ampiezza massima delle oscillazioni (cioé c_2), agendo ad esempio sulla velocità iniziale.

Esercizio 17.1 Determinare c_2 in funzione di x_0 .

Va da sé che, matematicamente non cé ragione di privilegiare un parametro rispetto all’altro. Ovviamente, dato T , abbiamo $\sqrt{-\gamma} = \frac{k\pi}{T}$, ovvero: $(-\gamma) = \frac{k^2\pi^2}{T^2}$.

Ovvero $\gamma = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}$

Vedremo che questo approccio sará utile nella risoluzione di equazioni a derivate parziali mediante separazione di variabili.

É consuetudine frequente scrivere l’equazione dei moti armonici come $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Ovviamente $\omega^2 = -\gamma$. E quindi in tal caso abbiamo $\omega^2 = \frac{k^2\pi^2}{T^2}$ ■

Ricordiamo alcune nozioni relative agli autovalori.

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ di numeri reali. La matrice A individua una funzione $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cosí definita

$$\mathcal{A}(x) = A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dove é stata indicata con X la matrice (detta anche, per la sua forma “vettore colonna”) i cui elementi sono le coordinate di x rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n .

Diciamo che $x \neq 0$ é un autovettore per A se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ ⁸ t.c. $\mathcal{A}(x) = \lambda x$

⁸A volte la ricerca degli autovalori si effettua in \mathbb{C} . Ovverossia matrici e vettori hanno le loro componenti in \mathbb{C}

(ovviamente x é autovettore per \mathcal{A} se e solo se il corrispondente \mathbf{X} é autovettore per A , cioè $\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$).

É noto che $\hat{\lambda}$ é autovettore per la matrice A se e solo se $\hat{\lambda}$ é radice dell'equazione caratteristica $\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$.

Consideriamo ora $W = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $V = \left\{ \xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \xi(t) = \xi(T) = t \right\}$ ed $\mathcal{L} : V \rightarrow W$ definito come $\mathcal{L}(x) = \ddot{x}$.

Si noti che \mathcal{L} é lineare (cioé: $\mathcal{L}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathcal{L}(\xi) + \beta\mathcal{L}(\eta)$), cosí come lo era \mathcal{A} .

E che il problema ai limiti dato lo possiamo interpretare come quello della ricerca di $x \in V$ t.c. $\mathcal{L}(x) = \gamma x$. Vi é quindi una notevole somiglianza col problema della ricerca degli autovalori per una matrice, o per un operatore lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n .

Quindi $\gamma = -\frac{k^2 n^2}{T^2}$ sarebbe un autovalore e la funzione $t \mapsto \sin \sqrt{\frac{k^2 n^2}{T^2}} t$ sarebbe un autovettore corrispondente a tale autovalore.

17.1 Serie di Fourier e spazi euclidei

$V := \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{1, \dots, n\}} :=$ $= \{\varphi : \{1, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}\}$ $\varphi = (\varphi(1), \dots, \varphi(n)) =$ $(v_1, \dots, v_n) = v$	$W := \mathcal{C}^1([-l, l]) :=$ $= \{f : [-l, l] \mapsto \mathbb{R}, f \text{ continua con}$ $f' \text{ continua}\}$
V é spazio vettoriale	W é spazio vettoriale
Prodotto scalare: $\varphi \cdot \psi = v \cdot w = \sum_{i=1}^n v_i w_i =$ $= \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi_i$	Prodotto scalare: $f \cdot g = \int_{-l}^l f(x)g(x)dx$
lunghezza di un vettore $\ \varphi\ = \ v\ = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i^2 \right\}^{1/2}$ $= \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi^2(i) \right\}^{1/2}$	lunghezza di un vettore $\ f\ = \left\{ \int_{-l}^l f^2(x)dx \right\}^{1/2}$ furba idea, di definire la “distanza” tra f e zero come scarto quadratico medio...
Base canonica: e_1, \dots, e_n dove: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ \cdot $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ $e_n = (0, 0, \dots, 1)$	“Base” canonica $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2l}}$ $f_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$ $g_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$
I vettori della base canonica sono <i>linearmente indipendenti</i> . Anzi, come suggerisce il nome, sono una <i>base</i> per lo spazio vettoriale V .	I vettori della base canonica sono <i>linearmente indipendenti</i> . <i>Non</i> é però vero che ogni vettore di W possa essere espresso come combinazione lineare di questi vettori. Però é quasi vero... Nel senso che ogni vettore di W puó essere <i>approssimato</i> da una opportuna combinazione lineare dei vettori della “base”. E questo lo possiamo fare per ogni scelta della “bontá” dell'approssimazione.
Sono tutti di lunghezza 1.	Sono tutti di lunghezza 1
Sono a 2 a2 ortogonali tra loro (se distinti) $e_i \cdot e_j = 0 \quad \text{se } i \neq j:$	Sono a 2 a2 ortogonali tra loro (se distinti) $f_i \cdot f_j = 0 \quad \text{se } i \neq j$ $g_i \cdot g_j = 0 \quad \text{se } i \neq j$ $f_i \cdot g_j = 0 \quad \text{se } \forall i, j$

<p>Componenti di un vettore</p> <p>Sia $v \in V$ Componenti sono $v \cdot e_i$</p>	<p>Componenti di un vettore</p> <p>Sia $h \in W$ Componenti sono $h \cdot f_n$ e $h \cdot g_n$ $h \cdot f_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l h(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ $h \cdot g_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l h(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$</p>
<p>Vettore come combinazione lineare della base: $v = \sum_{i=1}^n (v \cdot e_i) e_i$ E inoltre $\ v\ = \left\{ \sum_{i=1}^n (v \cdot e_i)^2 \right\}^{1/2}$</p>	<p>Vettore come “combinazione lineare” della “base”: $h = \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot f_n + \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot g_n$ (1.1) E inoltre $\ h\ = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (h \cdot f_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (h \cdot g_n)^2 \right\}^{1/2}$</p> <p>(17.1)pb: che senso dare a questa serie? Vedi analisi funzionale. É una convergenza diversa da quella puntuale (“convergenza in L^2”)</p>

17.2 Serie numeriche e serie di funzioni

Sia $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione. Vogliamo dare un senso ad $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$. Facciamo cosí

- definiamo $s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$
- se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, allora diciamo che “ s é la somma della serie di termine generale a_n ”. E scriviamo $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. In tal caso diciamo che la serie é convergente.

Esempio 17.1

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Ovviamente $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$
Quindi diciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ ■

Esempio 17.2 $a_n = 1$.

$s_n = 1 + \dots + 1$ n volte. Allora $s_n = n$.

E $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$. Quindi la serie data non é convergente.

■

Esempio 17.3 $a_n = \frac{1}{n}$. Questa volta non é agevole avere una formula compatta, comoda da maneggiare, per s_n . Inoltre, essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, non é facile “predire” il comportamento della serie, visto che stiamo sommando infiniti termini che diventano via via piú piccoli.

Con artifici, ovvero ricorrendo ad un criterio di convergenza (criterio dell’ordine di infinitesimo), si puó provare che la serie data *non* converge. É $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ ■

Esempio 17.4 $a_n = (-1)^n$. $s_n = ?$ $s_1 = 1$ $s_2 = -1 + 1 = 0$

$s_3 = -1 + 1 - 1 = s_2 - 1 = -1$. $s_4 = s_3 + (-1)^4 = s_3 + 1 = 0$ etc...

$s_n = -1$ se n é dispari, mentre $s_n = 0$ se n é pari. Quindi non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Pertanto la serie data *non* é convergente.

■

Nel terzo esempio sopra visto, é fatta una osservazione chiave per capire dove sono le difficoltá nel trattare le serie.

Il problema é che s_n non é in generale esprimibile con formule facilmente trattabili. Di solito é a_n che é dato da una formula. Peccato che per stabilire la convergenza o meno della serie noi dobbiamo studiare il limite della successione s_n !

I vari criteri di convergenza per le serie (della radice, del rapporto, dell’ordine di infinitesimo, di Leibniz, ed il criterio integrale, per citare i piú noti) servono proprio ad ovviare a questo problema: essi infatti danno delle condizioni da “testare” sulla successione a_n , per sapere se la serie data converge oppure no.

1

17.3 Serie di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme

Siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di \mathbb{R} . Cosa vuol dire $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$?

Possiamo dare una risposta, rifacendo quello che si é fatto per le serie numeriche, vedendo la “ x ” come un “parametro”.

Consideriamo, fissato $x \in I$, $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

Ovviamente, in questo modo, abbiamo definito una funzione da I in $\mathbb{R} : s_n : I \rightarrow \mathbb{R}$

Sempre ad x fissato, possiamo andare a vedere se la successione di numeri reali $s_n(x)$ é convergente oppure no. É ragionevole aspettarsi che il limite ci sia oppure no a seconda di x . E che anche il valore del limite, qualora esso esista e sia reale, possa dipendere da x . Se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ esiste ed é reale per ogni $x \in I$, lo individuiamo con $s(x)$. E in tal caso diciamo che la serie delle $f_n(x)$ converge *puntualmente* alla funzione $s : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Esempio 17.1!

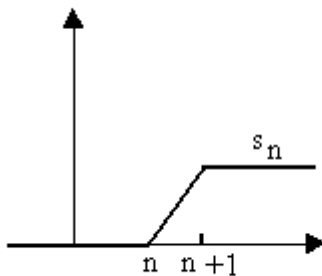


Figura 17.1

Quindi, in questo caso, abbiamo convergenza puntuale alla funzione s identicamente nulla.

■

Nell'esempio precedente si ha convergenza puntuale, ma *non* convergenza *uniforme*. Cosa vuol dire “convergenza uniforme”? Vediamo la definizione.

Definizione 17.1 *Siano date $s_n, s : I \rightarrow \mathbb{R}$, e supponiamo che sia $s_n(x) \rightarrow s(x) \forall x \in I$. Sia poi $J \subseteq I$.*

Se abbiamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |s_n(x) - s(x)| = 0$, allora diciamo che s_n converge uniformemente a s su J . Cosa che indichiamo così: $s_n \rightarrow_J s$.

Nell'esempio precedente, *non* si ha $s_n \rightarrow_{\mathbb{R}} s$. Però si ha $s_n \rightarrow_J s$ se ad esempio, $J = [-100, 100]$. Vediamo un altro esempio.

Esempio 17.6 Abbiamo che

$$s_n(x) \rightarrow s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

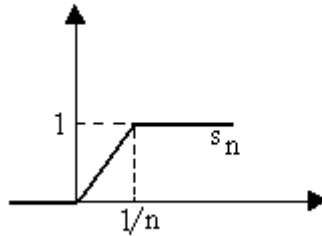


Figura 17.2

Ma *non* si ha $s_n \rightarrow_{\mathbb{R}} s$. ■

Si noti, in questo esempio, che le s_n sono funzioni continue, mentre s non é continua in 0. In effetti, se si avesse, $s_n \rightarrow_J s$ e le s_n fossero continue su J , la funzione s sarebbe “obbligata” ad essere continua, in forza del seguente teorema che ci fa capire come mai la convergenza uniforme sia cosí importante.

Teorema 17.1 *Siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo f_n continua su I . Posto $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, sia $s_n \rightarrow_I s$. Allora, $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ é continua su I .*

Si noti però che la convergenza uniforme, se é sufficiente a garantire la continuitá della somma di una serie di funzioni continue, *non basta* però a garantire la derivabilitá. Vediamo un esempio.

Esempio 17.7

$$s_n(x) = \begin{cases} -x & x \leq -2/n \\ \frac{n}{4}x^2 + \frac{1}{n} & -\frac{2}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ x & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

Come si vede facilmente dal prossimo grafico, si ha che $s_n \rightarrow_{\mathbb{R}} s$.
Dove $s(x) = (x)$.

Ma mentre le s_n sono derivabili (con derivata prima continua, come si vede nel secondo grafico), lo stesso non é per s . ■

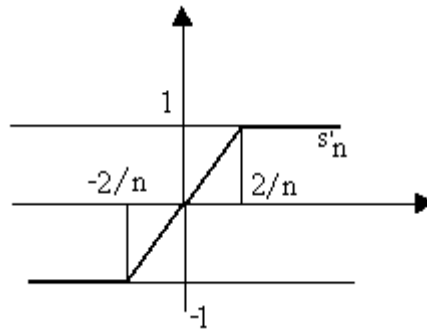
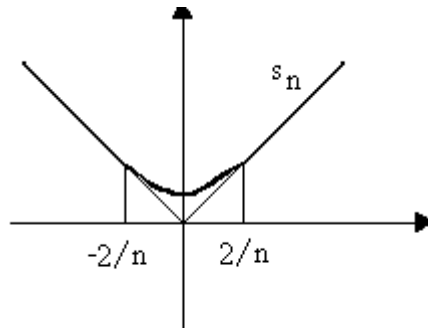


Figura 17.4

Nell'esempio precedente si vede chiaramente che la serie delle derivate non converge uniformemente. Si potrebbe sperare che sia questa la condizione che ci permette di ottenere la derivabilità della somma di una serie. Così è, infatti.

Teorema 17.2 *Siano $s_n, s : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. E sia $s_n \in C^1(I)$. Se è $s_n(x) \rightarrow s(x) \forall x \in I$, e se si ha che $\exists t : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $s_n' \rightarrow_I t$, allora, s è derivabile e $s'(x) = t(x) \quad \forall x \in I$.*

Particolarmente importante è il seguente criterio di convergenza (di Weierstrass). Non solo perché è molte volte di applicabilità pressoché immediata, ma anche perché, rispetto al teorema precedente, ci permette di garantire che una data serie converge uniformemente senza che siamo obbligati a fare alcuna “illazione” su quale potrebbe essere il limite. Specificamente, rispetto al precedente teorema, ci permette di garantire la convergenza di s'_n senza che siamo obbligati a conoscere t (ovviamente la “candidata naturale” per t è s' : peccato che non sempre abbiamo a disposizione una formula per sche ci consenta di calcolarne la derivata!!)

Teorema 17.3 (*criterio di convergenza di Weierstrass*). Siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo esistano $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in I$. E supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente su I .

Esempio 17.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{2^n}$. Per il criterio di Weierstrass si vede che (essendo $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$) la serie é convergente uniformemente su tutto \mathbb{R} . É poi: $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi x}{L}}{2^k}$, quindi, $s'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos \frac{k\pi x}{L} k\pi}{L}$. Abbiamo $|f'_n(x)| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi x}{L} n\pi}{L} \right| \leq \frac{n\pi}{L2^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Essendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L2^n}$ convergente, ne segue che la serie delle f_n é uniformemente convergente su tutto \mathbb{R} . Allora $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{2^n}$ é derivabile ed é $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{L} n\pi}{L}$. Si noti che possiamo applicare ripetutamente il teorema di derivabilitá e il criterio di Weierstrass, ottenendo alla fine che s é di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. ■

17.4 Serie di funzioni: serie di Fourier

Teorema 17.4 Sia $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, con f ed f' "continue a tratti" (nel senso che esistono x_0, x_1, \dots, x_n con $L = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L$ tale che $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ é di classe C' per ogni i , ed inoltre esistono finiti i limiti agli estremi sia per $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ che per $f'|_{]x_i, x_{i+n}[}$. Si definisce:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad , n = 1, 2, \dots$$

Allora, la serie: $\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}]$ (detta serie di Fourier per f su $[-L, L]$) converge a

- $f(x)$ se $x \in]-L, L[$ ed f é continua in x
- $\frac{1}{2} (\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t))$ se $x \in]-L, L[$ ed f non é continua in x
- $\frac{1}{2} (\lim_{t \rightarrow -L^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow -L^+} f(t))$ per $x = -L, L$

Osservazione 17.1 Se f é periodica e continua su $[-L, L]$, allora, la serie di Fourier converge ad f su tutto $[-L, L]$ (ed al prolungamento per periodicitá di f su tutto \mathbb{R} . Nota bene: sempre nell'ipotesi del teorema (??)!Cioé,

ci serve che f' sia continua a tratti. La pura e semplice continuità di f non permette di garantire la convergenza della serie di Fourier di f ad f stessa.

■

Funzioni pari e dispari. Ricordiamo che una funzione $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:

- pari se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in [-L, L]$
- dispari se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in [-L, L]$

É facile provare il seguente:

Teorema 17.5 *Se f é pari, allora $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (cioé la serie di Fourier di f é una serie di “puri coseni”). Se f é dispari, allora $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (la serie di Fourier di f é una serie di “puri seni”).*

É anche facile dedurre dal teorema (??), il seguente risultato che ci dá lo sviluppo in serie “di soli seni” o “di soli coseni” per una generica funzione, non necessariamente pari oppure dispari.

Teorema 17.6 *Sia $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, con f ed f' “continue a tratti” (vedasi teorema (??)). Allora, abbiamo che $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$ ed anche che $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ (entrambe le uguaglianze vanno intese nel senso del teorema (??)), pur di definire:*

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

La dimostrazione di questo teorema si ottiene prolungando f a tutto $[-L, L]$ in modo “pari” o in modo “dispari” rispettivamente, e poi applicando al prolungamento di f cosí ottenuto il teorema (??).

17.5 Serie di Fourier ed equazione del calore

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Supponiamo che f sia sviluppabile in serie di Fourier (f “ \mathcal{C} a tratti”). Risolvendo l’equazione differenziale per separazione di variabili, si ottiene formalmente

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

quale soluzione dell’equazione del calore. Dove i c_n sono i coefficienti dello sviluppo di f in serie di Fourier di soli seni su $[0, L]$:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Verifichiamo che u é *effettivamente soluzione* della equazione del calore. Lo proveremo grazie al teorema di derivazione termine a termine.

Occupiamoci di $\frac{\partial u}{\partial t}$. É vero che:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right) \quad ?$$

Per potere scrivere l’uguaglianza precedente, ci é sufficiente poter garantire la convergenza uniforme della serie delle derivate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Si noti che noi vogliamo che l’equazione del calore sia soddisfatta su $]0, L[\times]0, \infty[$.

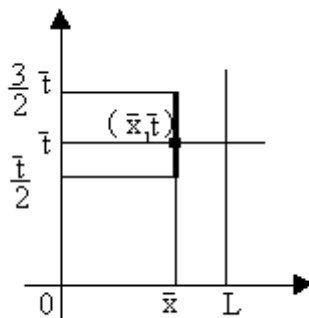


Figura 17.5

Sia allora, $(\bar{x}, \bar{t}) \in]0, L[\times]0, \infty[$.

Consideriamo l’intervallo $[\frac{\bar{t}}{2}, \frac{3\bar{t}}{2}]$, con ascissa \bar{x} . Andiamo a vedere se é soddisfatto il criterio di convergenza di Weierstrass.

$$\left| c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right| \leq |c_n| \cdot \underbrace{\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}}_{\text{questo termine tende a 0 esponenzialmente se } n \rightarrow \infty} = a_n$$

Allora, per garantire la convergenza della serie numerica di termine generale a_n , sarebbe sufficiente poter garantire che c_n é una successione limitata.

Ma abbiamo:

$$|c_n| = \left| \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}| dx \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx$$

Pertanto, i c_n sono limitati ($\frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx$ ne é un maggiorante $\forall n \in \mathbb{N}$).

Quindi, la serie delle derivate converge uniformemente.

Considerazioni del tutto analoghe si applicano ad u ed alle $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Quindi, otteniamo anche che :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(-\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n^2 \pi^2}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

E quindi, possiamo affermare che $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, essendo vero “termine a termine” che :

$$\underbrace{c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}}_{\text{termine generale per } \frac{\partial u}{\partial t}} = \alpha^2 \underbrace{c_n \left(-\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}}_{\text{termine generale per } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$